CÁC BÀI TOÁN ĐẾM – XÁC SUẤT HAY VÀ KHÓ

Tạp chí và tư liệu toán học

Tiếp nối thành công của số trước, trong số này chúng ta sẽ cùng đi tìm hiểu các bài toán đếm – xác suất hay và khó. Bên cạnh các phương pháp tính xác suất cơ bản như trong sách giáo khoa, trong bài viết này mình sẽ giới thiệu cho các bạn một vài công cụ mạnh nữa để giải quyết các bài toán xác suất. Bản pdf được đăng trên blog ***Chinh phục Olympic toán*** các bạn chú ý đón đọc nhé!

I. HAI BÀI TOÁN TÍNH XÁC SUẤT CÓ NHIỀU ỨNG DỤNG

1. BÀI TOÁN CHIA KẸO EULER

Bài toán chia kẹo của Euler là bài toán nổi tiếng trong Lý thuyết tổ hợp. Với những học sinh chuyên Toán cấp 3 thì đây là bài toán quen thuộc và có nhiều ứng dụng. Dưới đây là một cách tiếp cận bài toán chia kẹo của Euler cho học sinh lớp 6 & 7 để thấy rằng các bài toán đếm nói riêng và các bài toán tổ hợp nói chung luôn là những bài toán mà lời giải của nó chứa đựng sự hồn nhiên và ngây thơ. Trước hết, xin phát biểu lại bài toán chia kẹo của Euler

Bài toán chia kẹo của Euler:

Có n cái kẹo (giống nhau) chia cho k em bé, hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho em nào cũng có kẹo.

Một cách hợp lí, ta hãy xét bài toán trong trường hợp cụ thể, đơn giản hơn để từ đó định hướng đưa ra lời giải cho bài toán tổng quát.

Bài toán 1. Có 20 cái kẹo (giống nhau) chia cho 3 em bé, hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho

a) Mỗi em có ít nhất 1 cái kẹo.

b) Mỗi em có ít nhất 2 cái kẹo.

c) Em thứ nhất có ít nhất 1 cái kẹo, em thứ hai có ít nhất 2 cái kẹo và em thứ ba có nhiều nhất 3 cái kẹo.

Lời giải.

a) Nhận thấy rằng, vì mỗi em có ít nhất một cái kẹo nên số kẹo của em thứ nhất nhận được ít nhất là 1 và nhiều nhất là 18 Xét các trường hợp

Trường hợp 1. Em thứ nhất nhận được 1 cái kẹo, thì số kẹo của em thứ hai có thể là $1,2,3,...,18$ em thứ ba nhận số kẹo còn lại sau khi chia cho em thứ nhất và em thứ hai xong, nghĩa là trong trường hợp này có 18 cách chia kẹo.

Trường hợp 2. Em thứ nhất nhận được 2 cái kẹo, khi đó số kẹo của em thứ hai có thể là $1,2,3,...,17$ em thứ ba nhận số kẹo còn lại, nghĩa là trong trường hợp này có 17 cách chia kẹo

…

Hoàn toàn tương tự cho các trường hợp còn lại, ta nhận thấy số cách chia 20 cái kẹo cho 3 em bé sao cho em nào cũng có kẹo là $18+17+...+2+1=171$

Phát biểu tổng quát.

Nếu $k=1$ thì chỉ có 1 cách chia kẹo

Nếu $k\ge 2$ ta trải n chiếc kẹo thành dàn hàng ngang, tiếp theo ta dùng $(k-1)$ chiếc thước đặt vào $(n-1)$ khe giữa các viên kẹo để nó chia thành k phần. Như vậy có tất cả C_{n-1}^{k-1} cách.

Cả 2 trường hợp ta đều có C_{n-1}^{k-1} cách chia kẹo.

Trên đây là lời giải của bài toán chia kẹo Euler – bài toán đếm nổi tiếng với nhiều ứng dụng trong các bài toán đếm khác. Bài này tác giả sẽ trình bày bài toán gốc cơ bản và một số bài toán đếm dạng ứng dụng mà nếu đếm theo cách thông thường sẽ rất khó khăn, nhưng khi hiểu theo các đếm của bài toán Euler thì bài toán lại trở thành đơn giản.

Sau đây ta sẽ cùng tìm hiểu một ứng dụng rất lớn trong việc đếm số nghiệm nguyên của phương trình.

Bài toán 1. Phương trình $\sum_{i=1}^{k} x_i = n\,(n\ge k)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

Coi x_i là phần kẹo của em nhỏ thứ i trong bài toán chia kẹo thì số nghiệm của phương trình chính là số cách chia n chiếc kẹo cho k em nhỏ. Vậy phương trình có C_{n-1}^{k-1} nghiệm nguyên dương.

Bài toán 2. Phương trình $\sum_{i=1}^{k} x_i = n\,(n\ge k)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Ta có $x_1+x_2+...+x_k=n \Leftrightarrow (x_1+1)+(x_2+1)+...+(x_k+1)=n+k$

Đặt $x_i'=x_i+1$ thì x_i' là các số nguyên dương.

Áp dụng bài toán gốc ta có tất cả C_{n+k-1}^{k-1} nghiệm nguyên không âm của phương trình

Bài toán 3. Bất phương trình $\sum_{i=1}^{k} x_i < n\,(n\ge k+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

Ta luôn có $\sum_{i=1}^{k} x_i < n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i + x' = n\,(x'\ge 1)$. Vậy có tất cả C_{n-1}^{k} nghiệm nguyên dương của phương trình.

Bài toán 4. Bất phương trình $\sum_{i=1}^{k} x_i \le n\,(n\ge k)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

Ta có $\sum_{i=1}^{k} x_i \le n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i + x' = n\,(x'\ge 0) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i + x'' = n+1\,(x''=x'+1)$

Áp dụng bài toán Euler ta có C_n^k nghiệm

Bài toán 5. Phương trình $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện $x_i \ge d_i\,(d_i\ge 0), n\ge \sum_{i=1}^{k} d_i\,(k\ge 1)$?

Đặt $x_i' = x_i - d_i + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_i' \geq 1 \\ \sum_{i=1}^{k} x_i' = n + k - \sum_{i=1}^{k} d_i \end{cases}$.

Đặt $D = \sum_{i=1}^{k} d_i$ thì theo bài toán chia kẹo, phương trình có $C_{n+k-D-1}^{k-1}$ nghiệm.

2. BÀI TOÁN ĐẾM HÌNH HỌC.

Bài toán 1. Cho đa giác có n đỉnh. Xét tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác

- Có đúng 1 cạnh chung với đa giác $n(n-4)$
- Có đúng 2 cạnh chung với đa giác n
- Không có cạnh chung với đa giác $C_n^3 - n - n(n-4)$

Bài toán 2. Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh.

Số tam giác vuông có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác là $n(2n-2)$

Bài toán 3. Cho đa giác đều có n đỉnh. Số tam giác tù được tạo thành từ 3 trong n đỉnh của đa giác là $\left[\begin{array}{l} n = 2k \rightarrow n.C_{\frac{n-2}{2}}^2 \\ n = 2k+1 \rightarrow n.C_{\frac{n-1}{2}}^2 \end{array}\right.$

Bài toán 4. Cho đa giác đều có n đỉnh. Số tam giác nhọn được tạo thành từ 3 trong n đỉnh của đa giác $= C_n^3 -$(số tam giác tù + số tam giác vuông).

Bài toán 5. Cho đa giác đều có n đỉnh. Công thức tổng quát tính số tam giác tù:

- Nếu n chẵn $\rightarrow n.C_{\frac{n-2}{2}}^2$
- Nếu n lẻ $\rightarrow n.C_{\frac{n-1}{2}}^2$

Bài toán 6. Cho đa giác có n đỉnh. Xét tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác

- Có đúng 1 cạnh chung với đa giác $n \times \left[C_{n-4}^2 - (n-5)\right] = A$
- Có đúng 2 cạnh chung với đa giác $n(n-5) + \frac{n(n-5)}{2} = B$
- Có đúng 3 cạnh chung với đa giác $n = C$
- Không có cạnh chung với đa giác $C_n^4 - (A+B+C)$

Và ta có thể chứng minh được $C_n^4 - (A+B+C) = \frac{n}{4} C_{n-5}^3$

Bài toán 7. Cho đa giác **đều** có $2n$ đỉnh.

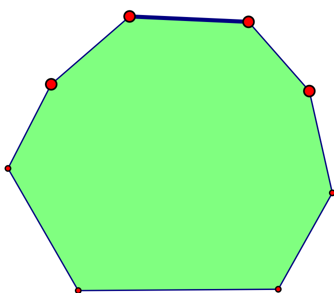
Số tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác và tạo thành HÌNH CHỮ NHẬT là C_n^2.

Bài toán 8. Cho đa giác **đều** có $4n$ đỉnh.

Số tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác và tạo thành HÌNH VUÔNG là n

Chứng minh.

Tứ giác có đúng 1 cạnh chung với đa giác



Chọn 1 cạnh trong n cạnh của đa giác nên có n cách.

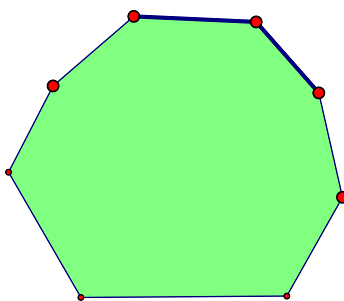
Chọn 2 đỉnh còn lại trong $n-4$ đỉnh (tham khảo hình vẽ trên) nên có C_{n-4}^2 nhưng 2 đỉnh này không được liên tiếp nên trừ cho $n-5$ (vì 2 đỉnh liên tiếp sẽ tạo nên 1 cạnh mà có $n-4$ đỉnh còn lại nên có $n-5$ cạnh).

Vậy trong trường hợp này có $n\times\left[C_{n-4}^2-(n-5)\right]$ tứ giác.

Tứ giác có đúng 2 cạnh chung với đa giác

Trường hợp 1: Tứ giác có hai cạnh kề trùng với cạnh của đa giác

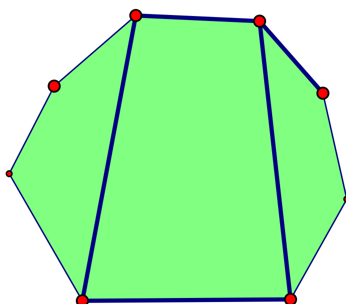
Vì hai cạnh kề cắt nhau tại 1 đỉnh, mà đa giác có n đỉnh nên có n cách chọn hai cạnh kề trùng với cạnh của đa giác.



Chọn 1 đỉnh còn lại trong $n-5$ đỉnh (bỏ 3 đỉnh tạo nên hai cạnh kề và 2 đỉnh hai bên, tham khảo hình vẽ). Do đó trường hợp này có $n(n-5)$ tứ giác.

Trường hợp 2: Tứ giác có hai cạnh đối thuộc cạnh của đa giác

Chọn 1 cạnh trong n cạnh của đa giác nên có n cách.



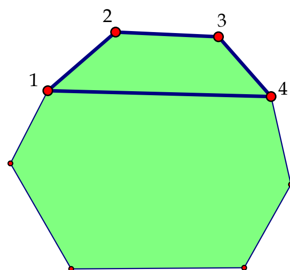
Trong $n-4$ đỉnh còn lại (bỏ 2 đỉnh tạo nên cạnh đã chọn ở trên và 2 đỉnh liền kề cạnh đã chọn, tham khảo hình vẽ) sẽ tạo nên $n-5$ cạnh. Chọn 1 cạnh trong $n-5$ cạnh đó nên có $n-5$ cách. Tuy nhiên trong trường hợp này số tứ giác mình đếm đến 2 lần.

Do đó trường hợp này có $\frac{n(n-5)}{2}$ tứ giác. Vậy có $n(n-5)+\frac{n(n-5)}{2}$ tứ giác thỏa mãn.

Tứ giác có đúng 3 cạnh chung với đa giác

Đánh số thứ tự các đỉnh của đa giác, ta có n bộ 4 số:

$(1;2;3;4)$, $(2;3;4;5)$, ..., $(n-3;n-2;n-1;n)$, $(n-2;n-1;n;1)$, $(n-1;n;1;2)$, $(n;1;2;3)$.



Vậy trường hợp này có n tứ giác thỏa mãn.

II. CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP.

Câu 1: Cho tập $A=\{1;2;3;...;2018\}$ và các số $a,b,c\in A$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có dạng abc sao cho $a<b<c$ và $a+b+c=2016$.

Lời giải

Xét phương trình $a+b+c=2016$.

Ta biết phương trình trên có C_{2015}^{2} nghiệm nguyên dương.

- TH1: Xét các cặp nghiệm 3 số trùng nhau: $a=b=c=672$.
- TH2: Xét các cặp nghiệm có $a=b$, $c\neq a\Rightarrow 2a+c=2016$. Suy ra c là số chẵn thỏa $0<c<2016$ nên có 1007 giá trị c. Do đó có 1007 cặp, mà có cặp trừ cặp $(672,672,672)$ (loại). Do đó có 1006 cặp.
- Tương tự ta suy ra có 1006.3 cặp nghiệm có 2 trong 3 số trùng nhau.

Do số tập hợp gồm ba phần tử có tổng bằng 2016 là $\dfrac{C_{2015}^{2}-3.1006-1}{3!}=337681$.

(Chia cho $3!$ là do $a<b<c$ nên không tính hoán vị của bộ ba (a,b,c))

Câu 2: Cho tập $A=\{1;2;3;...;100\}$. Chọn ngẫu nhiên 3 số từ tập A. Tính xác suất để 3 số được chọn ra không có 2 số nào là 2 số nguyên liên tiếp.

Lời giải

Số cách chọn ngẫu nhiên 3 số là C_{10}^{3}

Ta tìm số cách chọn bộ 3 số $(a;b;c)$ thỏa mãn, theo giả thiết ta có $1\le a<b-1<c-2\le 8$

Đặt $b'=b-1;c'=c-2\Rightarrow 1\le a<b'<c'\le 8$.

Mỗi cách chọn ra bộ 3 $(a;b';c')$ từ tập $\{1;2;...;8\}$ tương ứng với một bộ ba số $(a;b;c)$ thỏa mãn. Vậy có tất cả C_{8}^{3} cách chọn thỏa mãn. Xác suất cần tìm là $\dfrac{C_{8}^{3}}{C_{10}^{3}}=\dfrac{7}{15}$

Câu 3: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 3 chữ số được lập thành từ tập $X = \{1;2;...;8\}$. Rút ngẫu nhiên từ tập X một số tự nhiên. Tính xác suất để số rút được số mà trong số đó chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước?

Lời giải

Số các số thuộc tập S là $8.9.9 = 648$

Số rút ra có dạng $\overline{abc}$ với $1 \le a \le b \le c \le 8$. Đặt $a' = a - 1; c' = c + 1 \Rightarrow 0 \le a' < b < c' \le 9$.

Mỗi cách chọn ra bộ 3 $(a;b';c')$ từ tập $\{0;1;2;...;9\}$ tương ứng với một bộ ba số $(a;b;c)$ thỏa mãn. Vậy có tất cả C_{10}^{3} cách chọn thỏa mãn.

Vậy xác suất cần tính là $\dfrac{5}{27}$

Câu 4: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số. Tính xác suất để số rút được số mà trong số đó chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước và ba chữ số đứng giữa đôi một khác nhau?

Lời giải

Số các số thuộc tập S là 9.10^4

Số chọn ra có dạng $\overline{abcde}$ với $1 \le a < b < c < d \le e \le 9$

Đặt $a' = a - 1; e' = e + 1 \Rightarrow 0 \le a' < b < c < d < e' \le 10$

Đến đây thực hiện tương tự câu trên ta tìm được C_{11}^{5} số.

Vậy xác suất cần tính là $\dfrac{77}{1500}$.

Câu 5: Từ 12 học sinh gồm 5 học sinh giỏi, 4 học sinh khá, 3 học sinh trung bình, giáo viên muốn thành lập 4 nhóm làm 4 bài tập lớn khác nhau, mỗi nhóm 3 học sinh. Tính xác suất để nhóm nào cũng có học sinh giỏi và học sinh khá.

Lời giải

Ta có số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{12}^{3}.C_{9}^{3}.C_{6}^{3}.C_{3}^{3}$.

Đánh số 4 nhóm là A, B, C, D

- Bước 1: xếp vào mỗi nhóm một học sinh khá có $4!$ cách.
- Bước 2: xếp 5 học sinh giỏi vào 4 nhóm thì có 1 nhóm có 2 học sinh giỏi. Chọn nhóm có 2 học sinh giỏi có 4 cách, chọn 2 học sinh giỏi có C_{5}^{2} cách, xếp 3 học sinh giỏi còn lại có $3!$ cách.
- Bước 3: Xếp 3 học sinh trung bình có $3!$cách.

Đáp số: $\dfrac{4!.4.C_{5}^{2}.3!.3!}{C_{12}^{3}C_{9}^{3}C_{6}^{3}C_{3}^{3}} = \dfrac{36}{385}$.

Câu 6: Trò chơi quay bánh xe số trong chương trình truyền hình "Hãy chọn giá đúng" của kênh VTV3 Đài truyền hình Việt Nam, bánh xe số có 20 nấc điểm: 5, 10, 15,..., 100 với vạch chia đều nhau và giả sử rằng khả năng chuyển từ nấc điểm đã có tới các nấc điểm còn lại là như nhau. Trong mỗi lượt chơi có 2 người tham gia, mỗi người được quyền chọn quay 1 hoặc 2 lần, và điểm số của người chơi được tính như sau:

- Nếu người chơi chọn quay 1 lần thì điểm của người chơi là điểm quay được.
- Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm quay được không lớn hơn 100 thì điểm của người chơi là tổng điểm quay được.
- Nếu người chơi chọn quay 2 lần và tổng điểm quay được lớn hơn 100 thì điểm của người chơi là tổng điểm quay được trừ đi 100.

Luật chơi quy định, trong mỗi lượt chơi người nào có điểm số cao hơn sẽ thắng cuộc, hòa nhau sẽ chơi lại lượt khác. An và Bình cùng tham gia một lượt chơi, An chơi trước và có điểm số là 75. Tính xác suất để Bình thắng cuộc ngay ở lượt chơi này.

Lời giải

Cách 1: Ta có $n(\Omega)=\frac{100-5}{5}+1=20$.

Để Bình thắng ta có ba trường hợp.

- Trường hợp 1. Bình quay một lần ra điểm số lớn hơn 75, ta có 5 khả năng thuộc tập hợp $\{80;85;90;95;100\}$. Do đó xác suất là $P_1=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.
- Trường hợp 2. Bình quay lần đầu ra điểm số là $a\le 75$, ta có 15 khả năng.

Do đó xác suất là $P_2=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

Khi đó để thắng Bình cần phải có tổng hai lần quay lớn hơn 75, ta có 5 khả năng thuộc tập hợp $\{80-a;85-a;90-a;95-a;100-a\}$. Do đó xác suất là $P_3=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

Vậy xác suất để Bình thắng ngay trong lượt là $P=P_1+P_2.P_3=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}.\frac{1}{4}=\frac{7}{16}$.

Cách 2:

- TH1: Bình quay một lần và thắng luôn.

Vì An quay ở vị trí 75 nên Bình chỉ có thể quay vào 5 trong số 20 vị trí để có thể thắng.

Do đó $P(A_1)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

- TH2: Bình quay hai lần mới thắng.

Nghĩa là lần một Bình quay được kết quả nhỏ hơn hoặc bằng 75 và quay tiếp để tổng hai lần quay lớn hơn 75 đồng thời nhỏ hơn hoặc bằng 100.

Giả sử lần 1 Bình quay được a điểm, lần 2 quay được b điểm.

Cần có: $\begin{cases} a \le 75 \\ a+b \in \{80,85,90,95,100\} \end{cases}$.

Khi đó: Chọn a có 15 cách, chọn b có 5 cách.

Suy ra chọn cặp $\{a,b\}$ có $15.5=75$ cách.

Không gian mẫu cho TH2 có 20.20 cách. Do đó $P(A_2)=\frac{75}{20.20}=\frac{3}{16}$.

Kết luận: $P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$.

Câu 7: Một số tự nhiên được gọi là số thú vị nếu số này có 8 chữ số đôi một khác nhau được lập thành tự tập $\{1;2;...;8\}$ và số đó chia hết cho 1111. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên thú vị như thế?

Lời giải

Số cần tìm có dạng $i=\overline{a_1a_2a_3a_4b_1b_2b_3b_4}$. Ta có tổng các chữ số của số cần tìm là tổng các chữ số từ 1 đến 8 bằng 36 chia hết cho 9 nên số cần tìm chia hết cho 9. Do 9 và 1111 có ước chung lớn nhất là 1 nên theo giả thiết thì i chia hết cho 9999.

Đặt $x=\overline{a_1a_2a_3a_4}, y=\overline{b_1b_2b_3b_4}$. Ta có $i=x.10^4+y=9999x+x+y$ chia hết cho 9999 từ đó suy ra $(x+y)$ chia hết cho 9999.

Mặt khác $0<x+y<2.9999 \Rightarrow x+y=9999$. Do đó $a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3=a_4+b_4=9$

Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8 có 4 cặp $(1;8),(2;7),(3;6),(4;5)$ nên có 8 cách chọn a_1; 6 cách chọn a_2; 4 cách chọn a_3 và 2 cách chọn a_1 tức chọn a_k có luôn b_k.

Vậy số các số thú vị là $8.6.4.2=384$ số

Câu 8: Cho tập $A=\{1;2;3;...;18\}$. Chọn ngẫu nhiên 5 số từ tập A. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 số trong tập A sao cho hiệu của 2 số bất kì trong 5 số đó cí trị tuyệt đối không nhỏ hơn 2?

Lời giải

Các số chọn ra luôn sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Giả sử dãy 5 số được chọn ra thỏa mãn là $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$. Theo giả thiết ta có:

$$1 \le a_1 < a_2-1 < a_3-2 < a_4-3 < a_5-4 \le 14$$

Đặt $a_2'=a_2-1, a_3'=a_3-2, a_4'=a_4-3, a_5'=a_5-4$

Đến đây thực hiện tương tự câu 2, ta có số cách chọn là C_{14}^5 cách chọn.

Câu 9: Có 8 bạn cùng ngồi xung quanh một cái bàn tròn, mỗi bạn cầm một đồng xu như nhau. Tất cả 8 bạn cùng tung đồng xu của mình, bạn có đồng xu ngửa thì đứng, bạn có đồng xu sấp thì ngồi. Xác suất để không có hai bạn liền kề cùng đứng là

Lời giải

Gọi A là biến cố không có hai người liền kề cùng đứng.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 2^8 = 256$.

Rõ ràng nếu nhiều hơn 4 đồng xu ngửa thì biến cố A không xảy ra.

Để biến cố A xảy ra có các trường hợp sau:

- TH1: Có nhiều nhất 1 đồng xu ngửa. Kết quả của trường hợp này là $1 + 8 = 9$.
- TH2: Có 2 đồng xu ngửa.

Hai đồng xu ngửa kề nhau: có 8 khả năng.

Suy ra số kết quả của trường hợp này là $C_8^2 - 8 = 20$.

- TH3: Có 3 đồng xu ngửa.

Cả 3 đồng xu ngửa kề nhau: có 8 kết quả.

Trong 3 đồng xu ngửa, có đúng một cặp kề nhau: có $8.4 = 32$ kết quả.

Suy ra số kết quả của trường hợp này là $C_8^3 - 8 - 32 = 16$.

- TH4: Có 4 đồng xu ngửa.

Trường hợp này có 2 kết quả thỏa mãn biến cố A xảy ra.

Như vậy $n(A) = 9 + 20 + 16 + 2 = 47$.

Xác suất để không có hai bạn liền kề cùng đứng là $P = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{47}{256}$.

Câu 10: Cho đa giác đều 20 cạnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu hình chữ nhật những không phải là đỉnh của hình vuông có các đỉnh là đỉnh của đa giác đã cho?

Lời giải

Số hình vuông có các đỉnh của đa giác đều là $\frac{20}{4} = 5$

Đa giác đều này có tất cả 10 đường chéo qua tâm, một hình chữ nhật tạo bởi hai đường chéo qua tâm nên có tất cả C_{10}^2 hình chữ nhật

Vậy số hình chữ nhật không phải là hình vuông có các đỉnh là đỉnh của đa giác đều đã cho là $45 - 5 = 40$

Chú ý: Số đa giác đều có m cạnh có đỉnh là các đỉnh của đa giác đều n cạnh có thể có là $\frac{n}{m}$

Câu 11: Từ các chữ số thuộc tập hợp $S = \{1;2;3;...;8;9\}$ có bao nhiêu số có chín chữ số khác nhau sao cho chữ số 1 đứng trước chữ số 2, chữ số 3 đứng trước chữ số 4 và chữ số 5 đứng trước chữ số 6?

Lời giải

Chọn 2 vị trí để xếp 2 chữ số 1, 2 (số 1 đứng trước 2): có C_9^2 cách.

Chọn 2 vị trí để xếp 2 chữ số 3, 4 (số 3 đứng trước 4): có C_7^2 cách.

Chọn 2 vị trí để xếp 2 chữ số 5, 6 (số 5 đứng trước 6): có C_5^2 cách.

3 chữ số còn lại có $3!$ cách.

Vậy có $3!.C_9^2.C_7^2.C_5^2 = 45360$ số.

Câu: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D, tại đỉnh A có một con sâu, mỗi lần di chuyển nó bò theo cạnh của hình hộp chữ nhật và đi đến đỉnh kề với đỉnh nó đang đứng. Tính xác suất sao cho 9 lần di chuyển nó dừng tại đỉnh C'

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử tọa độ đỉnh $A(0;0;0)$ và $C'(1;1;1)$.

Ta thấy: mỗi lần sâu di chuyển là cộng thêm 1 tại 1 trong 3 vị trí hoành độ, tung độ và cao độ từ vị trí sâu đang đứng. Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 3^9 = 19683$.

Sau 9 lần di chuyển sau đứng tại vị trí $(1;1;1)$ khi và chỉ khi sâu di chuyển số lần tại các tọa độ thành phần hoành độ ; tung độ, cao độ là : $(3;3;3)$; các hoán vị của bộ $(1;3;5)$; các hoán vị của bộ $(7;1;1)$.

Do đó số trường hợp thuận lợi của biến cố A : sâu ở C' sau 9 bước di chuyển là

$n(A) = C_9^3.C_6^3.C_3^3 + 6.C_9^5.C_4^3.C_1^1 + 3.C_9^7.C_2^1.C_1^1 = 4920$

Câu 12: Cho đa giác có 12 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đó. Xác suất để 3 đỉnh được chọn tạo thành một tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có số tam giác được tạo từ 3 đỉnh trong 12 đỉnh: C_{12}^3.

- Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác và 2 cạnh là cạnh của đa giác: cứ 3 đỉnh liên tiếp cho 1 tam giác thỏa mãn đề bài, nên có 12 tam giác. (hoặc hiểu theo cách khác: tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh liên tiếp của đa giác tức là có 2 cạnh là 2 cạnh liên tiếp của đa giác, 2 cạnh này cắt nhau tại 1 đỉnh, mà đa giác này có 12 đỉnh nên có 12 tam giác thỏa trường hợp này)
- Số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác và 1 cạnh là cạnh của đa giác: Trước tiên ta chọn 1 cạnh trong 12 cạnh của đa giác nên có 12 cách chọn; tiếp theo chọn 1 đỉnh còn lại trong 8 đỉnh (trừ 2 đỉnh tạo nên cạnh đã chọn và 2 đỉnh liền kề với cạnh đã chọn). Do đó trong trường hợp này có 8.12 tam giác.

Ta có $\begin{cases} n(\Omega) = C_{12}^3 \\ n(A) = C_{12}^3 - 12 - 8.12 \end{cases} \Rightarrow P = \dfrac{C_{12}^3 - 12 - 12.8}{C_{12}^3}$

Câu 13: Cho đa giác (H) có n đỉnh $(n \in \mathbb{N},\ n > 4)$. Biết số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) và không có cạnh nào là cạnh của (H) gấp 5 lần số các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của (H) và có đúng 1 cạnh là cạnh của (H). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $n \in [4;12]$. **B.** $n \in [13;21]$. **C.** $n \in [22;30]$. **D.** $n \in [31;38]$.

Lời giải

Số tam giác tạo thành có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác là C_n^3

Số tam giác tạo thành có đúng 2 cạnh là cạnh của đa giác là n

Số tam giác tạo thành có đúng 1 cạnh là cạnh của đa giác là $n(n-4)$ (điều kiện $n \in \mathbb{N}$ và $n < 4$)

Suy ra số tam giác tạo thành không có cạnh nào là cạnh của đa giác là $C_n^3 - n - n(n-4)$.

Theo giả thiết, ta có $C_n^3 - n - n(n-4) = 5.n(n-4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 35(t/m) \\ n = 4(L) \end{array}\right.$

Chọn ý **D.**

Câu 14: Cho đa giác đều gồm 100 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên ra 3 đỉnh, xác suất để 3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác tù là bao nhiêu?

Lời giải

Đánh số các đỉnh là $A_1, A_2, ..., A_{100}$.

Xét đường chéo A_1A_{51} của đa giác là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều chia đường tròn ra làm hai phần, mỗi phần có 49 điểm: từ A_2 đến A_{50} và A_{52} đến A_{100}.

Khi đó, mỗi tam giác có dạng $A_1A_iA_j$ là tam giác tù nếu A_i và A_j cùng nằm trong nửa đường tròn

- Chọn nửa đường tròn: có 2 cách chọn.
- Chọn hai điểm A_i, A_j là hai điểm tùy ý được lấy từ 49 điểm $A_2, A_3, ..., A_{50}$ có $C_{49}^2 = 1176$ cách chọn.

Giả sử A_i nằm giữa A_1 và A_j thì tam giác $A_1A_iA_j$ tù tại đỉnh A_i. Mà $\Delta A_jA_iA_1 \equiv \Delta A_1A_iA_j$ nên kết quả bị lặp hai lần. Có 100 cách chọn đỉnh.

Vậy số tam giác tù là $\dfrac{2.1176.100}{2} = 117600$.

Chú ý: Cho đa giác đều có n đỉnh. Công thức tổng quát tính số tam giác tù:

- Nếu n chẵn thì số tam giác tù là $n.C_{\frac{n-2}{2}}^2$
- Nếu n lẻ thì số tam giác tù $n.C_{\frac{n-1}{2}}^2$

Áp dụng công thức nhanh ta có $n.C_{\frac{n-2}{2}}^2 = 100.C_{49}^2 = 117600$.

Câu 15: Cho đa giác lồi (H) có 22 cạnh. Gọi X là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của (H). Chọn ngẫu nhiên 2 tam giác trong X, xác suất để chọn được 1 tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của đa giác (H) và 1 tam giác không có cạnh nào là cạnh của (H) bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\begin{cases} |X| = C_{22}^3 = 1540 \\ n(\Omega) = C_{1540}^2 = 1185030 \\ n(A) = C_{22\times 18}^1 \times C_{1540-(22\times 18+22)}^1 = 444312 \end{cases} \Rightarrow P = \dfrac{748}{1995}$

Câu 16: Cho một đa giác đều gồm $2n$ đỉnh $(n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$. Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh trong số $2n$ đỉnh của đa giác, xác suất ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông là $\dfrac{1}{5}$. Tìm n.

Lời giải

Ta có không gian mẫu $n(\Omega) = C_{2n}^3$.

Để ba đỉnh được chọn tạo thành tam giác vuông khi và chỉ khi có hai đỉnh trong ba đỉnh là hai đầu mút của một đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác và đỉnh còn lại là một trong số $(2n-2)$ đỉnh còn lại của đa giác. Đa giác có $2n$ đỉnh nên có $\dfrac{2n}{2} = n$ đường kính.

- Số cách chọn 1 đường kính là $C_n^1 = n$.
- Số cách chọn 1 đỉnh còn lại trong $(2n-2)$ đỉnh là $C_{2n-2}^1 = 2n-2$.

Suy ra $n(A) = n(2n-2)$.

Theo đề bài ta có phương trình $\dfrac{n(2n-2)}{C_{2n}^3} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow n = 8$.

Câu 17: Cho đa giác đều có 15 đỉnh. Gọi M là tập tất cả các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập M, xác suất để tam giác được chọn là một tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều là bao nhiêu?

Lời giải

- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đều. Xét một đỉnh A bất kỳ của đa giác: Có 7 cặp đỉnh của đa giác đối xứng với nhau qua đường thẳng OA, hay có 7 tam giác cân tại đỉnh A. Như vậy, với mỗi một đỉnh của đa giác có 7 tam giác nhận nó làm đỉnh tam giác cân.
- Số tam giác đều có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác là $\dfrac{15}{3} = 5$ tam giác.
- Tuy nhiên, trong các tam giác cân đã xác định ở trên có cả tam giác đều, do mọi tam giác đều thì đều cân tại 3 đỉnh nên tam giác đều được đếm 3 lần.

Suy ra $n(A) = 7.15 - 3.5 = 90$.

Ta có $\begin{cases} n(\Omega) = C_{15}^3 = 455 \\ n(A) = 7.15 - 3.5 = 90 \end{cases} \Rightarrow P = \dfrac{90}{455} = \dfrac{18}{91}$

Câu 18: Cho đa giác đều có 20 đỉnh. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đều, xác suất để 3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác vuông không cân là bao nhiêu?

Lời giải

- Số tam giác vuông là 10.18.
- Số tam giác vuông cân: Cứ mỗi cách chọn 1 đường kính là có 2 tam giác cân (2 điểm tạo nên tam giác cân là giao điểm của đường thẳng qua tâm vuông góc với đường kính đã chọn với đường tròn). Do đó có 10.2 tam giác vuông cân.

Câu 19: Lấy ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số. Xác suất để chọn được số tự nhiên có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ mà $a_1 \le a_2 + 1 \le a_3 - 3 < a_4 \le a_5 + 2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vì $a_2 + 1 \le a_3 - 3 \Rightarrow \begin{cases} a_2 \le 5 \\ a_3 \ge 4 \end{cases}$.

Số có dạng $\overline{1042a_5}$ có 10 cách chọn a_5.

Số có dạng $\overline{1043a_5}$ có 9 cách chọn a_5.

…………………………………………..

Số có dạng $\overline{1049a_5}$ có 3 cách chọn a_5.

- Vậy những số có dạng $\overline{104a_4a_5}$ có $3 + 4 + ... + 10 = 52$ số.

Số có dạng $\overline{1053a_5}$ có 9 cách chọn a_5.

Số có dạng $\overline{1054a_5}$ có 8 cách chọn a_5.

…………………………………………..

Số có dạng $\overline{1059a_5}$ có 3 cách chọn a_5.

- Vậy những số có dạng $\overline{105a_4a_5}$ có $52 - 10 = 42$ số.
- Vậy những số có dạng $\overline{106a_4a_5}$ có $42 - 9 = 33$ số.
- Vậy những số có dạng $\overline{107a_4a_5}$ có $33 - 8 = 25$ số.
- Vậy những số có dạng $\overline{108a_4a_5}$ có $25 - 7 = 18$ số.
- Vậy những số có dạng $\overline{109a_4a_5}$ có $18 - 6 = 12$ số.

Kết luận: Những số có dạng $\overline{10a_3a_4a_5}$ có $12 + 18 + 25 + 33 + 42 + 52 = 182$ số.

Những số có dạng $\overline{11a_3a_4a_5}\left(a_3 \ge 5\right)$ có $12 + 18 + 25 + 33 + 42 = 130$ số.

Những số có dạng $\overline{12a_3a_4a_5}\left(a_3 \ge 6\right)$ có $12 + 18 + 25 + 33 = 88$ số.

Những số có dạng $\overline{13a_3a_4a_5}\left(a_3 \ge 7\right)$ có $12 + 18 + 25 = 55$ số.

Những số có dạng $\overline{14a_3a_4a_5}\left(a_3 \ge 8\right)$ có $12 + 18 = 30$ số.

Những số có dạng $\overline{15a_3a_4a_5}\left(a_3 \ge 9\right)$ có 12 số.

Kết luận: Những số có dạng $\overline{1a_2a_3a_4a_5}$ có $12 + 30 + 55 + 88 + 130 + 182 = 497$ số.

Từ đó ta lập luận như sau:

Những số có dạng $\overline{2a_2a_3a_4a_5}\left(a_2 \geq 1\right)$ có $12+30+55+88+130=315$ số.

Những số có dạng $\overline{3a_2a_3a_4a_5}\left(a_2 \geq 2\right)$ có $12+30+55+88=185$ số.

Những số có dạng $\overline{4a_2a_3a_4a_5}\left(a_2 \geq 3\right)$ có $12+30+55=97$ số.

Những số có dạng $\overline{5a_2a_3a_4a_5}\left(a_2 \geq 4\right)$ có $12+30=42$ số.

Những số có dạng $\overline{6a_2a_3a_4a_5}\left(a_2 \geq 5\right)$ có 12 số.

Vậy những số thỏa yêu cầu bài toán là $12+42+97+185+315+497=1148$.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{1148}{90000}$.

Câu 20: Cho một đa giác đều n đỉnh (n lẻ, $n \geq 3$). Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh của đa giác đều đó. Gọi P là xác suất sao cho 3 đỉnh đó tạo thành một tam giác tù. Biết $P=\frac{45}{62}$. Số các ước nguyên dương của n là bao nhiêu?

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên ra 3 đỉnh có $n\left(\Omega\right)=C_n^3$ cách.

Giả sử chọn được một tam giác tù ABC với góc A nhọn, B tù và C nhọn.

Chọn một đỉnh bất kì lấy làm đỉnh A có n cách. Kẻ đường kính qua đỉnh vừa chọn, chia đường tròn thành hai phần (trái và phải chẳng hạn).

Để tạo thành tam giác tù thì hai đỉnh còn lại được chọn sẽ hoặc cùng nằm bên trái hoặc cùng nằm bên phải.

- Hai đỉnh còn lại cùng nằm bên trái có $C_{\frac{n-1}{2}}^2$ cách.
- Hai đỉnh còn lại cùng nằm bên phải có $C_{\frac{n-1}{2}}^2$ cách.

Vậy có thể có tất cả $n\left(C_{\frac{n-1}{2}}^2+C_{\frac{n-1}{2}}^2\right)$ tam giác tù, tuy nhiên ứng với mỗi tam giác vai trò góc nhọn của A và C như nhau nên số tam giác được tính lặp 2 lần. Do đó số tam giác tù tạo thành là $\frac{n\left(C_{\frac{n-1}{2}}^2+C_{\frac{n-1}{2}}^2\right)}{2}=nC_{\frac{n-1}{2}}^2$.

Mà xác suất $P=\frac{nC_{\frac{n-1}{2}}^2}{C_n^3}=\frac{45}{62}$ $\left(1\right)$. Do n lẻ nên đặt $n=2k+1$ $\left(k \geq 1\right) \Rightarrow k=\frac{n-1}{2}$.

$$\Leftrightarrow 62\left(2k+1\right)C_k^2=45C_{2k+1}^3$$

$$\Leftrightarrow 62\left(2k+1\right)\frac{k!}{2!\left(k-2\right)!}=45\frac{\left(2k+1\right)!}{3!\left(2k-2\right)!}$$

$$\Leftrightarrow 31\left(k-1\right)=15\left(2k-1\right) \Leftrightarrow k=16$$

Vậy $n = 2k + 1 = 33$. Do đó số các ước nguyên dương của n là 4.

Câu 21: Biển số xe máy tỉnh K gồm hai dòng

- Dòng thứ nhất là $68XY$, trong đó X là một trong 24 chữ cái, Y là một trong 10 chữ số.
- Dòng thứ hai là $abc.de$, trong đó a, b, c, d, e là các chữ số.

Biển số xe được cho là "đẹp" khi dòng thứ hai có tổng các số là số có chữ số tận cùng bằng 8 và có đúng 4 chữ số giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 biển số trong các biển số "đẹp" để đem bán đấu giá?

Lời giải

Chọn X từ 24 chữ cái và chọn Y từ 10 chữ số, ta có $24.10 = 240$ (cách chọn).

Chọn 4 chữ số giống nhau từ các chữ số ta có 10 cách chọn;

Mỗi bộ gồm 4 chữ số giống nhau, ta có một cách chọn duy nhất 4 chữ số còn lại để tổng các số là số có chữ số tận cùng bằng 8, chẳng hạn: 4 chữ số 0, chữ số còn lại sẽ là 8; 4 chữ số 1, chữ số còn lại sẽ là 4;…; 4 chữ số 9, chữ số còn lại sẽ là 2).

Sắp xếp 5 chữ số vừa chọn có 5 cách xếp.

Do đó, có tất cả $10.5 = 50$ (cách chọn số ở dòng thứ hai).

Suy ra có tất cả $240.50 = 12000$ (biển số đẹp).

Chọn 2 biển số trong các biển số "đẹp" ta có $C_{12000}^{2} = 71994000$ (cách).

Câu 22: Có 8 bì thư được đánh số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 và 8 tem thư cũng được đánh số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Dán 8 tem thư lên 8 bì thư (mỗi bì thư chỉ dán 1 tem thư). Hỏi có thể có bao nhiêu cách dán tem thư lên bì thư sao cho có ít nhất một bì thư được dán tem thư có số trùng với số của bì thư đó.

Lời giải

Ta xét bài toán tổng quát n tem thư được dán vào n bì thư sao cho có ít nhất một bì thư được dán vào tem thư có số trùng với số của bì thư đó.

Đánh số các tem thư là T_1, T_2,..., T_n và các bì thư là B_1, B_2,..., B_n. Bài toán được giải quyết bằng nguyên lý phần bù: Lấy hoán vị n phần tử trừ đi trường hợp xếp mà không có tem thư nào được dán cùng số với bì thư.

Để giải quyết bài toán không có tem thư nào được dán cùng số với bì thư. Ta xây dựng dãy số $f(n)$ như sau:

Công việc dán n tem thư vào n bì thư sao cho không có bì thư nào được dán vào tem thư có số trùng với số của bì thư đó. Công việc này gồm có hai bước sau:

- Bước 1: Dán tem T_1 lên một bì thư B_j khác B_1, có $n - 1$ cách.
- Bước 2: Dán tem thư T_j vào bì thư nào đó, có hai trường hợp xảy ra như sau:

+ TH1: tem thư T_j được dán vào bì thư B_1. Khi đó còn lại $n-2$ tem (khác T_1 và T_j) là $T_2,...,T_{j-1},T_{j+1},...,T_n$ phải dán vào $n-2$ bì thư (khác B_1 và B_j). Quy trình được lặp lại giống như trên. Nên TH này có số cách dán bằng $f(n-2)$.

+ TH2: tem thư T_j không được dán vào bì thư B_1.

Khi đó các tem là $T_2,...,T_{j-1},T_j,T_{j+1},...,T_n$ sẽ được đem dán vào các bì B_1, $B_2,...,B_{j-1},B_{j+1},...,B_n$ (mà tem thư T_j không được dán vào bì thư B_1). Thì T_j lúc này bản chất giống T_1, ta đánh số lại $T_j \equiv T_1$. Nghĩa là $n-1$ tem $T_2,...,T_{j-1},T_1,T_{j+1},...,T_n$ sẽ được đem dán vào $n-1$ bì B_1, $B_2,...,B_{j-1},B_{j+1},...,B_n$ với việc đánh số giống nhau. Công việc này lại được lặp lại như từ ban đầu.

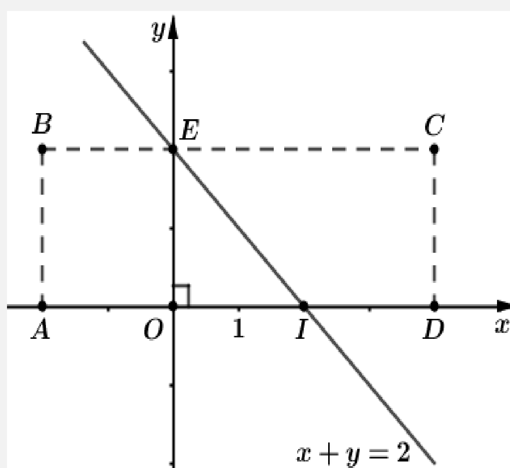
Nên TH này có số cách dán bằng $f(n-1)$.

Ta xét dãy $u_n = f(n)$ như sau: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \\ u_n = (n-1)(u_{n-1}+u_{n-2}) \end{cases}$

Như vậy kết quả của bài toán: n tem thư được dán vào n bì thư sao cho có ít nhất một bì thư được dán vào tem thư có số trùng với số của bì thư đó sẽ là $P_n - u_n$.

Áp dụng với $n=8$, ta được kết quả là $8!-14833=25487$.

Câu 23: Trên mặt phẳng Oxy, ta xét một hình chữ nhật $ABCD$ với các điểm $A(-2;0)$, $B(-2;2)$, $C(4;2)$, $D(4;0)$ (hình vẽ). Một con châu chấu nhảy trong hình chữ nhật đó tính cả trên cạnh hình chữ nhật sao cho chân nó luôn đáp xuống mặt phẳng tại các điểm có tọa độ nguyên (tức là điểm có cả hoành độ và tung độ đều nguyên). Tính xác suất để nó đáp xuống các điểm $M(x;y)$ mà $x+y<2$.



Lời giải

Số các điểm có tọa độ nguyên thuộc hình chữ nhật là $7.3=21$ điểm vì

$$\begin{cases} x \in \{-2;-1;0;1;2;3;4\} \\ y \in \{0;1;2\} \end{cases}$$

Để con châu chấu đáp xuống các điểm $M(x,y)$ có $x+y<2$ thì con châu chấu sẽ nhảy trong khu vực hình thang BEIA. Để $M(x,y)$ có tọa độ nguyên thì $\begin{cases} x\in\{-2;-1;0;1;2\} \\ y\in\{0;1;2\} \end{cases}$.

- Nếu $x\in\{-2;-1\}$ thì $y\in\{0;1;2\}\Rightarrow$ có $2.3=6$ điểm.
- Nếu $x=0$ thì $y\in\{0;1\}\Rightarrow$ có 2 điểm.
- Nếu $x=1\Rightarrow y=0\Rightarrow$ có 1 điểm.

Suy ra có tất cả $6+2+1=9$ điểm thỏa mãn.

Vậy xác suất cần tính $P=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$.

Câu 24: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, chọn ngẫu nhiên một điểm mà tọa độ là số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn hay bằng 4. Nếu các điểm đều có cùng xác suất được chọn như nhau, vậy thì xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2 là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi tọa độ điểm $M(x;y)$ thỏa $x,y\in\mathbb{Z}$ và $\begin{cases} |x|\le 4 \\ |y|\le 4 \end{cases}$ nên $\begin{cases} x\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\} \\ y\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\} \end{cases}$.

Suy ra $n(\Omega)=9.9=81$.

Gọi điểm $M'(x;y)$ thỏa $x,y\in\mathbb{Z}$ và theo giả thiết ta có:

$$OM\le 2\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\le 2 \\ x,y\in\mathbb{Z} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ x,y\in\mathbb{Z} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x,y\in\mathbb{Z} \\ x=0;\pm1;\pm2 \\ y^2\le 4-x^2 \end{cases}.$$

- Nếu $x=0\longrightarrow y=0;\pm1;\pm2$. Do đó có $1\times5=5$ cách chọn.
- Nếu $x=\pm1\longrightarrow y=0;\pm1$. Do đó có $2\times3=6$ cách chọn
- Nếu $x=\pm2\longrightarrow y=0$. Do đó có $2\times1=2$ cách chọn.

Suy ra $n(A)=5+6+2=13$. Vậy xác suất cần tính $P=\frac{13}{81}$.

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ở góc phần tư thứ nhất ta lấy 2 điểm phân biệt; cứ thế ở các góc phần tư thứ hai, thứ ba, thứ tư ta lần lượt lấy 3, 4, 5 điểm phân biệt (các điểm không nằm trên các trục tọa độ). Trong 14 điểm đó ta lấy 2 điểm bất kỳ. Tính xác suất để đoạn thẳng nối hai điểm đó cắt hai trục tọa độ.

Lời giải

Không gian mẫu là số cách chọn 2 điểm bất kỳ trong 14 điểm đã cho.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{14}^2=91$.

Gọi A là biến cố "Đoạn thẳng nối 2 điểm được chọn cắt hai trục tọa độ". Để xảy ra biến cố A thì hai đầu đoạn thẳng đó phải ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba hoặc phần tư thứ hai và thứ tư.

- Hai đầu đoạn thẳng ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba, có $C_2^1C_4^1$ cách.
- Hai đầu đoạn thẳng ở góc phần tư thứ hai và thứ tư, có $C_3^1C_5^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_2^1C_4^1 + C_3^1C_5^1 = 23$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{23}{91}$.

Câu 26: Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 có 6 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt $(n \ge 3,\ n \in \mathbb{N})$. Tìm n, biết rằng có 96 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho.

Lời giải

Cứ 3 điểm không thẳng hàng là tạo thành 1 tam giác.

Do đó số tam giác được tạo thành từ $n+6$ điểm gồm: 6 điểm (thẳng hàng) thuộc d_1 và n điểm (thẳng hàng) thuộc d_2 là $C_{n+6}^3 - C_6^3 - C_n^3$.

Theo giả thiết, ta có $C_{n+6}^3 - C_6^3 - C_n^3 = 96 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 4(N) \\ n = -8(L) \end{array}\right.$

Bài tập tương tự. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh $AB,\ BC,\ CD,\ DA$ lần lượt lấy $1,\ 2,\ 3$ và n điểm phân biệt $(n \ge 3,\ n \in \mathbb{N})$ khác $A,\ B,\ C,\ D$. Tìm n, biết số tam giác lấy từ $n+6$ điểm đã cho là 439. Đáp số $n = 10$.

Hướng dẫn. Theo giả thiết, ta có $C_{n+6}^3 - C_3^3 - C_n^3 = 439$.

Câu 27: Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số dạng $\overline{abc}$ thỏa a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác cân (kể cả tam giác đều)?

Lời giải

Gọi độ dài cạnh bên và cạnh đáy của tam giác cân là $x, y \Rightarrow \begin{cases} 0 < y < 2x \\ 0 < y \le 9 \\ 0 < x \le 9 \end{cases}$

- TH1: $\begin{cases} 0 < y \le 9 \\ 5 \le x \le 9 \end{cases}$ suy ra có $9.5 = 45$ cặp số.
- TH2: $\begin{cases} x = i \\ 1 \le y \le 2i - 1 \end{cases}$ với $1 \le x \le 4$. Với mỗi giá trị của i, có $2i - 1$ số.

Do đó, trường hợp này có: $(2.1-1)+(2.2-1)+(2.3-1)+(2.4-1) = 16$ cặp số

Suy ra có 61 cặp số $(x;y)$. Với mỗi cặp $(x;y)$ ta viết số có 3 chữ số trong đó có 2 chữ số x, một chữ số y.

Trong 61 cặp có:

+ 9 cặp $x=y$, viết được 9 số.

+ 52 cặp $x=y$, mỗi cặp viết được 3 số nên có $3.52=156$ số.

Vậy tất cả có 165 số.

Câu 28: Gọi A là tập các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc A. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 45.

Lời giải

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcdefgh}$ ta có a có 9 cách chọn

Các chữ số còn lại có A_9^7

Nên số phần tử của không gian mẫu: $9.A_9^7=1632960$

Gọi $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Ta có: $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45\vdots 9$

Ta có các bộ số mà tổng chia hết cho 9: $B\setminus\{0,9\}$, $B\setminus\{1,8\}$, $B\setminus\{2,7\}$, $B\setminus\{3,6\}$, $B\setminus\{4,5\}$.

Xét $B\setminus\{0,9\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcdefgh}$

Chọn h có một cách.

Chọn 7 chữ số còn lại xếp vào 7 vị trí có: $7!$.

Nên trường hợp này có $7!$ cách.

Xét $B\setminus\{1,8\}=\{0,2,3,4,5,6,7,9\}$

- Tận cùng là chữ số 0: có $7!$ cách
- Tận cùng là chữ số 5: a có 6 cách; các chữ số còn lại có: $6!$ cách

Suy ra: $7!+6.6!=9360$

Các trường hợp $B\setminus\{2,7\}$, $B\setminus\{3,6\}$ tương tự như $B\setminus\{1,8\}$.

Xét $B\setminus\{4,5\}=\{0,1,2,3,6,7,8,9\}$

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcdefgh}$

Chọn h có một cách.

Chọn 7 chữ số còn lại xếp vào 7 vị trí có: $7!$.

Nên trường hợp này có $7!$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là: $7!.2+9360.3=38160$.

Vậy xác suất của biến cố A là: $\dfrac{38160}{1632960}=\dfrac{53}{2268}$

Câu 29: Cho tập $X=\{6;7;8;9\}$, gọi E là tập các số tự nhiên khác nhau có 2018 chữ số lập từ các số của tập X. Chọn ngẫu nhiên một số trong tập E, tính xác suất để chọn được số chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi A_n, B_n lần lượt là tập các số chia hết, không chia hết cho 3.

Với mỗi số thuộc A_n có hai cách thêm vào cuối một chữ số 6 hoặc một chữ số 9 để được A_{n+1} và hai cách thêm một chữ số 7 hoặc một chữ số 8 để được B_{n+1}.

Với mỗi số thuộc B_n có một cách thêm vào cuối một chữ số 7 hoặc một chữ số 8 để được A_{n+1} và có ba cách thêm một chữ số để được B_{n+1}.

Như vậy $\begin{cases}|A_{n+1}|=2|A_n|+|B_n|\\|B_{n+1}|=2|A_n|+3|B_n|\end{cases}\Rightarrow|B_{n+1}|=3|A_{n+1}|-4|B_n|\Rightarrow|A_{n+1}|=5|A_n|-4|A_{n-1}|$.

Hay $|A_n|=5|A_{n-1}|-4|A_{n-2}|$.

Xét dãy số $a_n=|A_n|$, ta có $a_1=2$, $a_2=6$, $a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}$; $n\geq 3$.

Nên $a_n=\alpha+\beta.4^n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 4^n$.

Suy ra có $\frac{4^{2018}+2}{3}$ số chia hết cho 3.

Mà $|E|=4^{2018}$.

Vậy $P=\frac{4^{2018}+2}{3.4^{2018}}=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2^{4035}}\right)$.

Câu 30: Chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập $S=\{1;2;3;...;20\}$. Xác suất để chọn được 2 số mà tích của chúng là một số chính phương bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Số cách chọn ra ngẫu nhiên 2 số là C_{20}^2

Ta cần tìm số cách chọn ra cặp số $(a;b)$ thỏa mãn $1\leq a<b\leq 20, ab=c^2, 2\leq c\leq 19$

Có tất cả 11 cặp số như thế. Xác suất cần tính là $\frac{11}{C_{20}^2}=\frac{11}{190}$

Câu 31: Cho tập $A=\{1;2;3;...;2018\}$, hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 số từ tập A mà các số đó lập thành một cấp số nhân tăng và công bội là một số nguyên dương ?

Lời giải

5 số được chọn ra xếp được duy nhất dãy tăng, giả sử $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$

Theo giả thiết các số đó là $x_1, qx_1, q^2x_1, q^3x_1, q^4x_1, q\in\mathbb{N}, q\geq 2$

Ta có $q^4x_1\leq 2018\Rightarrow q\leq\sqrt[4]{\frac{2018}{x_1}}\leq\sqrt[4]{2018}\Rightarrow q\in\{2;3;4;5;6\}$

Mặt khác $1 \le x_1 \le \frac{2018}{q^4} \Rightarrow 1 \le x_1 \le \left[\frac{2018}{q^4}\right]$. Với mỗi số nguyên $q \in \{2;3;4;5;6\}$ ta có tất cả $\left[\frac{2018}{q^4}\right]$ cách chọn x_1 và các số còn lại có tương ứng duy nhất một cách chọn.

Vậy theo quy tắc cộng và quy tắc nhân ta có tất cả:

$$\sum_{k=2}^{6}\left[\frac{2018}{k^4}\right] = \left[\frac{2018}{2^4}\right] + \left[\frac{2018}{3^4}\right] + \left[\frac{2018}{4^4}\right] + \left[\frac{2018}{5^4}\right] + \left[\frac{2018}{6^4}\right] = 161$$

Bài tập tương tự

Chọn ngẫu nhiên 3 số từ tập $A = \{1;2;...;100\}$. Tính xác suất để chọn được 3 số mà các số đó lập thành một cấp số nhân tăng có công bội là một số nguyên dương?

Câu 32: Cho tập $A = \{1;2;3;...;30\}$. Chọn ngẫu nhiên 3 phần tử của A, tính xác suất để 3 phần tử được chọn lập thành một cấp số cộng ?

Lời giải

Số cách chọn ngẫu nhiên 3 phần tử là C_{30}^3

Ta tìm số các bộ số $(a;b;c)$ thỏa mãn $a,b,c \in A; 1 \le a \le b \le c \le 30; a + c = 2b$

Ta có a, c sẽ cùng tính chẵn lẻ.

- Nếu a, c cùng chẵn có C_{15}^2 cách chọn a, c và b có duy nhất một cách chọn
- Nếu a, c cùng lẻ có C_{15}^2 cách chọn a, c và b có duy nhất một cách chọn

Vậy có tất cả $2C_{15}^2$ cách chọn.

Câu 33: Cho tập $S = \{2^1, 2^2, ..., 2^{10}\}$. Chọn ngẫu nhiên 2 phần tử a, b của S, tính xác suất để $\log_a b$ là một số nguyên bằng ?

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu C_{10}^2

Ta thấy rằng nếu $\log_a b$ là một số nguyên dương thì đó phải là số nguyên dương lớn hơn 1. Thật vậy vì $a, b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0$ mặt khác 2 số này khác nhau nên $\log_a b$ phải là một số nguyên lớn hơn 1. Vậy $\log_a b = k \in \mathbb{Z}, k \ge 2 \Rightarrow b = a^k$

- Nếu $a = 2^1 \Rightarrow b \in \{2^2; 2^3; ...; 2^{10}\}$, có 9 cách chọn
- Nếu $a = 2^2 \Rightarrow b \in \{2^4; 2^6; 2^8; 2^{10}\}$, có 4 cách chọn
- Nếu $a = 2^3 \Rightarrow b \in \{2^6; 2^9\}$, có 2 cách chọn
- Nếu $a = 2^4 \Rightarrow b \in \{2^8\}$, có 1 cách chọn
- Nếu $a = 2^5 \Rightarrow b \in \{2^{10}\}$, có 1 cách chọn

Vậy có tất cả 17 cách chọn. Xác suất cần tính là $\frac{17}{45}$

Câu 34: Chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt a,b,c từ tập $S=\{1;2;3;...;30\}$. Tính xác suất để $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho 3 ?

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu C_{30}^3

Ta có nhận xét:

- $n=3k \Rightarrow n^2=9k^2 \equiv 0 \pmod 3$
- $n=3k+1 \Rightarrow n^2=9k^2+6k+1 \equiv 1 \pmod 3$
- $n=3k+2 \Rightarrow n^2=9k^2+12k+4 \equiv 1 \pmod 3$

Vậy để $a^2+b^2+c^2$ chia hết cho 3 thì a,b,c cùng chia hết cho 3 hoặc a,b,c cùng không chia hết cho 3. Tập S có 10 phần tử chia hết cho 3, 20 phần tử không chia hết cho 3.

Vậy số cách chọn là $C_{10}^3+C_{20}^3$. Xác suất cần tính là $\dfrac{9}{29}$

Câu 35: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 2018 chữ số và tổng các chữ số chia hết cho 3 ?

Lời giải

Vì tổng các chữ số bằng 3 nên chữ số lớn nhất trong dãy này có thể bằng 3, ta xét các trường hợp sau:

- Số tạo thành từ 1 số 3 và 2017 số 0, có duy nhất 1 số thỏa mãn
- Số tạo thành từ 1 số 1 và 1 số 2 có $2.C_{2017}^1=4034$ số thỏa mãn
- Số tạo thành từ 3 số 1 có $1.C_{2017}^2$ số thỏa mãn

Vậy có tất cả 2037171 số.

Bài tập tương tự

Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 10^{2018} và tổng các chữ số bằng 3?

Đáp số: $C_{2018}^1+A_{2018}^2+C_{2018}^3$

Câu 36: Một chuồng có 3 con thỏ trắng và 4 con thỏ nâu. Người ta bắt ngẫu nhiên lần lượt từng con ra khỏi chuồng cho đến khi nào bắt được cả 3 con thỏ trắng mới thôi. Xác suất để cần phải bắt đến ít nhất 5 con thỏ là?

Lời giải

Cách 1.

Xét biến cố đối $\overline{A}$: "bắt được 3 thỏ trắng trong 3 hoặc 4 lần".

- TH1: Bắt được 3 con thỏ trắng trong 3 lần đầu:

Ta có $n(\Omega)=7.6.5$ và $n(\overline{A_1})=3!$. Suy ra $P(\overline{A_1})=\dfrac{3!}{7.6.5}$.

- TH2: Bắt được 3 con thỏ trắng trong 4 lần đầu:

Suy ra lần 4 bắt được con trắng; lần 1, 2 và 3 bắt được 2 con trắng và 1 con nâu.

			T

Ta có $n(\Omega)=7.6.5.4$ và $n(\overline{A_2})=C_4^1.C_3^2.3!$. Suy ra $P(\overline{A_2})=\dfrac{C_4^1.C_3^2.3!}{7.6.5.4}$.

Suy ra $P(\overline{A})=P(\overline{A_1})+P(\overline{A_2})=\dfrac{4}{35}\Rightarrow P(A)=\dfrac{31}{35}$

Cách 2. Ta mô tả không gian của biến cố $\overline{A}$ như sau

$$\{TTT;\ TNNN;\ NTNN;\ NNTN\}$$

Suy ra $P(\overline{A})=\dfrac{4}{35}\Rightarrow P(A)=\dfrac{31}{35}$

Câu 37: Cho tập hợp $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;5;\ 6;7;8;9\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số được lập từ các chữ số thuộc tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, xác suất để số được chọn chia hết cho 6 bằng bao nhiêu?

Lời giải

Tập S có 9^4 phần tử.

Gọi số thỏa mãn biến cố là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$. Do $\overline{a_1a_2a_3a_4}\vdots 6\longrightarrow \overline{a_1a_2a_3a_4}\vdots 2$.

Suy ra $a_4\in\{2,4,6,8\}$: có 4 cách; và a_1, a_2 có 9^2 cách chọn.

- Nếu $a_1+a_2+a_4=3k\Rightarrow a_3\in\{3;6;9\}$ nên a_3 có 3 cách chọn.
- Nếu $a_1+a_2+a_4=3k+1\Rightarrow a_3\in\{2;5;8\}$ nên a_3 có 3 cách chọn.
- Nếu $a_1+a_2+a_4=3k+2\Rightarrow a_3\in\{1;4;7\}$ nên a_3 có 3 cách chọn.

Vậy a_3 luôn luôn có 3 cách chọn nên $n(A)=4.9^2.3=972$.

Ta có $\begin{cases} n(\Omega)=9^4 \\ n(A)=4.9^2.3 \end{cases}\Rightarrow P=\dfrac{4}{27}$

Câu 38: Trong buổi sinh hoạt nhóm của lớp, tổ một có 12 học sinh gồm 4 học sinh nữ trong đó có Hoa và 8 học sinh nam trong đó có Vinh. Chia tổ thành 3 nhóm, mỗi nhóm gồm 4 học sinh và phải có ít nhất 1 học sinh nữ. Xác suất để Hoa và Vinh cùng một nhóm là bao nhiêu?

Lời giải

Không gian mẫu là số cách chia 12 học sinh thành 3 nhóm và phải đảm bảo mỗi nhóm có ít nhất 1 học sinh nữ. Giả sử

- Nhóm thứ nhất có 2 nữ và 2 nam, có $C_4^2.C_8^2$ cách.
- Nhóm thứ hai có 1 nữ và 3 nam, có $C_2^1.C_6^3$.
- Sau khi chia nhóm thứ nhất và thứ hai xong thì còn lại 1 nữ và 3 nam nên nhóm thứ ba có duy nhất 1 cách.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_4^2.C_8^2.C_2^1.C_6^3=6720$.

Gọi A là biến cố "Hoa và Vinh cùng một nhóm". Ta mô tả các khả năng thuận lợi cho biến cố A như sau:

- Trường hợp 1. Hoa và Vinh cùng với 1 bạn nam và 1 bạn nữ thành một nhóm nên có $C_7^1.C_3^1$ cách. Nhóm thứ hai có 3 bạn nam và 1 bạn nữ nên có $C_6^3.C_2^1$. Cuối cùng còn lại 3 bạn nam và 1 bạn nữ nên có 1 cách duy nhất cho nhóm thứ ba. Do đó trong trường hợp này có $C_7^1.C_3^1.C_6^3.C_2^1 = 840$ cách.
- Trường hợp 2. Hoa và Vinh cùng với 2 bạn nam thành một nhóm nên có C_7^2 cách. Nhóm thứ hai có 2 bạn nam và 2 bạn nữ nên có $C_5^2.C_3^2$. Cuối cùng còn lại 3 bạn nam và 1 bạn nữ nên có 1 cách duy nhất cho nhóm thứ ba. Do đó trong trường hợp này có $C_7^2.C_5^2.C_3^2 = 630$ cách.
- Trường hợp 3. Hoa và Vinh cùng với 2 bạn nam thành một nhóm. Nhóm thứ hai có 3 bạn nam và 1 bạn nữ. Suy ra nhóm thứ ba có 2 bạn nam và 2 bạn nữ. Trường hợp này trùng với trường hợp thứ hai nên ta không tính.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $n(A) = 840 + 630 = 1470$.

Vậy xác suất cần tính $P = \dfrac{1470}{6720} = \dfrac{7}{32}$.

Câu 39: An và Bình cùng tham gia kì thi THPTQG năm 2018, ngoài thi ba môn Toán, Văn, Tiếng Anh bắt buộc thì An và Bình đều đăng kí thi them đúng hai môn tự chọn khác trong ba môn Vật lí, Hóa học và Sinh học dưới hình thức thi trắc nghiệm để xét tuyển Đại học. Mỗi môn tự chọn trắc nghiệm có 8 mã đề thi khác nhau, mã đề thi của các môn khác nhau là khác nhau. Tính xác suất để An và Bình có chung đúng một môn thi tự chọn và chung một mã đề.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "An và Bình có chung đúng một môn thi tự chọn và chung một mã đề".

Số khả năng An chọn 2 môn thi tự chọn và mã đề của 2 môn thi là $C_3^2.8^2$.

Số khả năng Bình chọn 2 môn thi tự chọn và mã đề của 2 môn thi là $C_3^2.8^2$.

Do đó, số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_3^2.8^2.C_3^2.8^2$.

Bây giờ ta đếm số khả năng để An và Bình có chung đúng một môn thi tự chọn và chung một mã đề:

Số khả năng An chọn 2 môn thi tự chọn và mã đề của 2 môn thi là $C_3^2.8^2$.

Sau khi An chọn thì Bình có 2 cách chọn 2 môn thi tự chọn để có đúng một môn thi tự chọn với An, để chung mã đề với An thì số cách chọn mã đề 2 môn thi của Bình là $1.8 = 8$ cách. Như vậy, số cách chọn môn thi và mã đề thi của Bình là 2.8.

Do đó: $n(A) = C_3^2.8^2.2.8$.

Bởi vậy: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_3^2.8^2.2.8}{C_3^2.8^2.C_3^2.8^2}=\dfrac{1}{12}$.

Câu 40 : Trong không gian cho $2n$ điểm phân biệt ($n>4$, $n\in\mathbb{N}$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và trong $2n$ điểm đó có đúng n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng và không có 4 điểm nào ngoài 4 điểm trong n điểm này đồng phẳng. Tìm n sao cho từ $2n$ điểm đã cho tạo ra đúng 201 mặt phẳng phân biệt

Lời giải

Cách 1.

Số cách chọn 3 điểm trong $2n$ điểm phân biệt đã cho là C_{2n}^3.

Số cách chọn 3 điểm trong n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng là C_n^3.

Số mặt phẳng được tạo ra từ $2n$ điểm đã cho là $C_{2n}^3-C_n^3+1$.

Như vậy: $C_{2n}^3-C_n^3+1=201\Leftrightarrow\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=200$

$$\Leftrightarrow\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=200$$

$$\Leftrightarrow 7n^3-9n^2+2n-1200=0\Leftrightarrow(n-6)\left(7n^2+33n+200\right)=0\Leftrightarrow n=6$$

Vậy $n=6$.

Cách 2.

Có các trường hợp sau :

- TH1 : n điểm đồng phẳng tạo ra 1 mặt phẳng.
- TH2 : n điểm không đồng phẳng tạo ra C_n^3 mặt phẳng.
- TH3 : 2 điểm trong n điểm đồng phẳng kết hợp với 1 điểm trong n điểm không đồng phẳng tạo ra $C_n^2C_n^1=n.C_n^2$ mặt phẳng.
- TH4 : 1 điểm trong n điểm đồng phẳng kết hợp với 2 điểm trong n điểm không đồng phẳng tạo ra $C_n^1C_n^2=n.C_n^2$ mặt phẳng.

Vậy có $1+C_n^3+2nC_n^2=201\Leftrightarrow n=6$.

Câu 41: Tung một đồng xu không đồng chất 2020 lần. Biết rằng xác suất xuất hiện mặt sấp là $0,6$. Tính xác suất để mặt sấp xuất hiện đúng 1010 lần.

Lời giải

Ta có C_{2020}^{1010} cách chọn 1010 vị trí trong 2020 lần tung đồng xu để mặt xấp xuất hiện, các lần tung còn lại không xuất hiện mặt sấp. Ứng với mỗi cách chọn cố định 1010 vị trí xuất hiện mặt xấp ta có xác suất của trường hợp đó tính như sau:

- Tại những lần mặt xấp xuất hiện thì xác suất xảy ra là $0,6$.
- Tại những lần mặt ngửa xuất hiện thì xác suất xảy ra là $1-0,6$.

Do có 1010 lần xuất hiện mặt sấp và 1010 xuất hiện mặt ngửa nên ứng với mỗi cách chọn cố định 1010 vị trí xuất hiện mặt xấp thì có xác xuất là $0,6^{1010}(1-0,6)^{1010}=(0,24)^{1010}$.

Vậy xác xuất cần tính là $C_{2020}^{1010}.(0,24)^{1010}$.

Câu 42 : Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 6. Lập các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số đã cho. Tính tổng của các số lập được.

Lời giải

Mỗi số số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 6 là một chỉnh hợp chập 3 của các chữ số này. Do đó, ta lập được $A_5^3=60$ số.

Do vai trò các số 1, 2, 3, 4, 6 như nhau, nên số lần xuất hiện của mỗi chữ số trong các chữ số này ở mỗi hàng (hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm) là như nhau và bằng $60:5=12$ lần.

Vậy, tổng các số lập được là $S=12.(1+2+3+4+6)(100+10+1)=21312$.

Câu 43: Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4...;100\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A, mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S. Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân bằng?

Lời giải

Giả sử tập con bất kì $\{a,b,c\}\in S\Rightarrow 1\le a,b,c\le 100$; a,b,c phân biệt và $a+b+c=91$.

Đây là bài toán chia kẹo Euler nên số bộ a,b,c là C_{91-1}^{3-1}

Tuy nhiên trong các bộ trên vẫn chứa các bộ có 2 chữ số giống nhau, số bộ có 2 chữ số giống nhau là $3.45=135$ (bộ). Vậy $n(\Omega)=\left(C_{90}^2-3.45\right):3!=645$.

Gọi A là biến cố: " a,b,c lập thành cấp số nhân"

Gọi q là công bội của cấp số nhân theo bài ra ta có $q>0$

$$a+aq+aq^2=91\Leftrightarrow a\left(1+q+q^2\right)=1.91=13.7$$

- Trường hợp 1: $\begin{cases}a=1\\1+q+q^2=91\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\q=9\end{cases}$
- Trường hợp 2: $\begin{cases}a=91\\1+q+q^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=91\\q=0\end{cases}$ (loại)
- Trường hợp 3: $\begin{cases}a=13\\1+q+q^2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=13\\q=2\end{cases}$ (thỏa mãn)
- Trường hợp 3: $\begin{cases}a=7\\1+q+q^2=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=7\\q=3\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy $n(A)=3\Rightarrow P(A)=\dfrac{3}{645}$.

Câu 44: Một tòa nhà có n tầng, các tầng được đánh số từ 1 đến n theo thứ tự từ dưới lên. Có 4 thang máy đang ở tầng 1. Biết rằng mỗi thang máy có thể dừng ở đúng 3 tầng (không kể tầng 1) và 3 tầng này không là 3 số nguyên liên tiếp và với hai tầng bất kỳ (khác tầng 1) của tòa nhà luôn có một thang máy dừng được ở cả hang tầng này. Hỏi giá trị lớn nhất của n là bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử 4 thang máy đó là A, B, C, D.

Do khi bốc hai thang bất kỳ luôn có một thang máy dừng được nên:

- Khi bốc hai tầng $2,3$ có một thang dừng được giả sử đó là thang A, nên tầng 4 không phải thang A dừng.
- Khi bốc hai tầng $3,4$ có một thang dừng được giả sử đó là thang B, nên tầng 5 không phải thang B dừng.
- Khi bốc hai tầng $4,5$ có một thang dừng được giả sử đó là thang C, nên tầng 6 không phải thang C dừng.
- Khi bốc hai tầng $5,6$ có một thang dừng được giả sử đó là thang D.
- Khi bốc hai tầng $6,7$ có một thang dừng được khi đó không thể là thang A, B, C vì sẽ dừng 4 (mâu thuẫn), thang D không thể ở tầng 7 do không thể ở ba tầng liên tiếp.

Vậy khách sạn có tối đa sáu tầng.

Câu 45: Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \le a \le b \le c \le d \le 9$.

Lời giải

Cách 1: Số tự nhiên có bốn chữ số có dạng $\overline{abcd}$

Ta có $a \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ suy ra có 9 cách chọn, $\overline{bcd}$ có 10^3 cách chọn

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9.10^3 = 9000$.

Gọi A là biến cố ''số được chọn có dạng $\overline{abcd}$, trong đó $1 \le a \le b \le c \le d \le 9$''

- Số dạng $\overline{aaaa}$ có 9 số.
- Số dạng $\overline{abcd}$ ($a < b < c < d$) có C_9^4 số.
- Số dạng $\overline{aaab}$ có C_9^2 số.
- Số dạng $\overline{aabb}$ có C_9^2 số.
- Số dạng $\overline{abbc}$ có C_9^3 số.
- Số dạng $\overline{abbc}$ có C_9^3 số.
- Số dạng $\overline{abcc}$ có C_9^3 số.

$\Rightarrow n(A) = 9 + C_9^4 + 3.C_9^2 + 3.C_9^3 = 495$.

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{495}{9000}=0.55$.

Cách 2: Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=9.10^3=9000$.

Từ giả thiết $1\le a\le b\le c\le d\le 9\Rightarrow 1\le a<b+1<c+1<d+1\le 9+3=12$.

Số cách chọn a, b, c, d và sắp xếp chúng theo một thứ tự duy nhất là $C_{12}^4=495$.

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{495}{9000}=0.55$.

Câu 46 : Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 7 chữ số và chia hết cho 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S, tính xác suất để các chữ số của số đó đôi một khác nhau.

Lời giải

Số chia hết cho 9 có dạng: $9m$, với $m\in\mathbb{Z}$.

Ta có $1000000\le 9m\le 10000000 \Leftrightarrow 111111<m\le 1111111$. Do đó có 1000000 số có 7 chữ số và chia hết cho 9. Từ các chữ số $0;1;2;...;9$ ta có các bộ gồm 7 số có tổng chia hết cho 9 là

$(0;2;3;4;5;6;7)$; $(0;1;3;4;5;6;8)$; $(0;1;2;4;5;7;8)$; $(0;1;2;3;6;7;8)$; $(0;3;4;5;7;8;9)$; $(0;2;4;6;7;8;9)$; $(0;1;5;6;7;8;9)$; $(0;1;2;3;4;8;9)$; $(0;1;2;3;5;7;9)$; $(2;3;4;5;6;7;9)$; $(1;3;4;5;6;8;9)$; $(1;2;4;5;7;8;9)$; $(1;2;3;6;7;8;9)$.

- Có 9 bộ số gồm 7 số có tổng chia hết cho 9 trong đó có số 0 nên từ các bộ số này lập được: $9\times 6\times 6!=38880$ số có 7 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 9.
- Có 4 bộ số gồm 7 số có tổng chia hết cho 9 tương tự như bộ số $(2;3;4;5;6;7;9)$, nên từ các bộ số này lập được $4\times 7!=20160$ số có 7 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 9.

Vậy, xác suất chọn một số từ tập S để được một số có các chữ số của số đó đôi một khác nhau là $P=\dfrac{38880+20160}{1000000}=\dfrac{369}{6250}$.

Câu 47: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $OMNP$ với $M(0;10)$, $N(100;10)$, $P(100;0)$ Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $A(x;y)$ với x, $y\in\mathbb{Z}$ nằm bên trong kể cả trên cạnh của hình chữ nhật $OMNP$. Lấy ngẫu nhiên 1 điểm $A(x;y)\in S$. Tính xác suất để $x+y\le 90$.

Lời giải

Cách 1: Tập hợp S gồm có $11.101=1111$ điểm.

Ta xét $S'=\{(x;y):x+y>90\}$ với $0\le x\le 100$ và $0\le y\le 10$

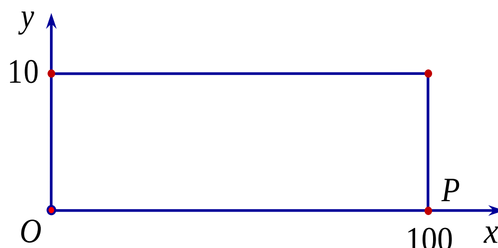
- Khi $y=0$ $\Rightarrow$ $x>90\Rightarrow x=\overline{91;100}$ $\Rightarrow$Có 10 giá trị của x
- Khi $y=1$ $\Rightarrow$ $x>89\Rightarrow x=\overline{90;100}$ $\Rightarrow$Có 11 giá trị của x

……

- Khi $y = 10 \Rightarrow x > 90 \Rightarrow x = \overline{91;100} \Rightarrow$ có 20 giá trị của x

Như vậy S' có 165 phần tử. Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{1111 - 165}{1111} = \dfrac{86}{101}$.

Cách 2:

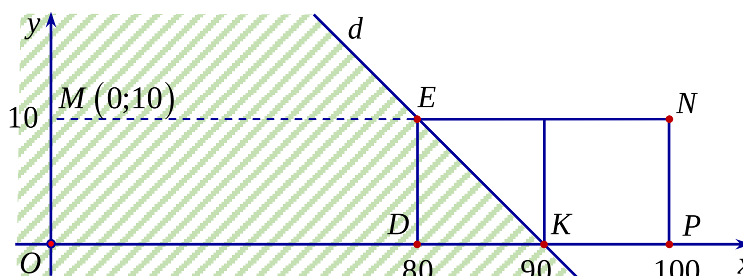


Nhận thấy các điểm cần tìm nằm trên các đường thẳng $y = m$, $m = \overline{0;10}$.

Dễ thấy trên các đường thẳng $y = 0$, $y = 1$, $y = 2...$, $y = 10$ có lần lượt 91, 90, $89...,81$ điểm.

Vậy xác suất cần tìm là $p(A) = \dfrac{91 + 90 + ... + 81}{11.101} = \dfrac{86}{101}$.

Cách 3:



Ta có $n(\Omega) = 11.101 = 1111$. Ta thấy $x + y \le 90$ có miền nghiệm là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d chứa điểm O.

Số điểm thuộc hình chữ nhật $ENPD$ là $21.11 = 231$.

Số điểm thuộc ΔEDK tính cả cạnh EK là $55 + 11 = 66$.

Suy ra $x + y > 90$ có $231 - 66 = 165$ điểm và $x + y \le 90$ có $1111 - 165 = 946$

$P(A) = \dfrac{946}{1111} = \dfrac{86}{101}$.

Câu 48: Hai thí sinh A và B tham gia một buổi thi vấn đáp. Cán bộ hỏi thi đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi thi gồm 10 câu hỏi khác nhau, được đựng trong 10 phong bì dán kín, có hình thức giống hệt nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi; thí sinh chọn 3 phong bì trong đó để xác định câu hỏi thi của mình. Biết rằng bộ 10 câu hỏi thi dành cho các thí sinh là như nhau, xác suất để 3 câu hỏi A chọn và 3 câu hỏi B chọn có ít nhất 1 câu hỏi giống nhau là bao nhiêu?

Lời giải

Không gian mẫu là tập hợp gồm các cặp hai bộ 3 câu hỏi, mà ở vị trí thứ nhất của cặp là bộ 3 câu hỏi thí sinh A chọn và ở vị trí thứ hai của cặp là bộ 3 câu hỏi thí sinh B chọn.

- Thí sinh A có C_{10}^3 cách chọn 3 câu hỏi từ bộ gồm 10 câu hỏi.
- Thí sinh B có C_{10}^3 cách chọn 3 câu hỏi từ bộ gồm 10 câu hỏi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{10}^3.C_{10}^3$.

Gọi X là biến cố "3 câu hỏi A chọn và 3 câu hỏi B chọn có ít nhất 1 câu hỏi giống nhau".

Để tìm số phần tử của X, ta đi tìm số phần tử của $\overline{X}$ như sau

- Giả sử A chọn trước nên có C_{10}^3 cách chọn 3 câu hỏi từ bộ gồm 10 câu hỏi.
- Để B chọn khác A thì B phải chọn 3 trong 7 câu hỏi còn lại từ bộ 10 câu hỏi nên có C_7^3 cách chọn.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{X}$ là $|\Omega_{\overline{X}}| = C_{10}^3.C_7^3$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |\Omega_{\overline{X}}|}{|\Omega|} = \frac{C_{10}^3.C_{10}^3 - C_{10}^3.C_{10}^7}{C_{10}^3.C_{10}^3} = \frac{17}{24}$.

Câu 49: Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, thí sinh A dự thi hai môn thi trắc nghiệm Vật lí và Hóa học. Đề thi của mỗi môn gồm 50 câu hỏi; mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn; trong đó có 1 phương án đúng, làm đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Mỗi môn thi thí sinh A đều làm hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại thí sinh A chọn ngẫu nhiên. Xác suất để tổng điểm 2 môn thi của thí sinh A không dưới 19 điểm là bao nhiêu?

Lời giải

Cách 1.

Thí sinh A không dưới 19 điểm khi và chỉ khi trong 10 câu trả lời ngẫu nhiên ở cả hai môn Vậy lí và Hóa học thì phải đúng ít nhất 5 câu.

Không gian mẫu là số phương án trả lời 10 câu hỏi mà thí sinh A chọn ngẫu nhiên. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 4^{10}$.

Gọi X là biến cố "Thí sinh A làm được ít nhất 5 câu trong 10 được cho là chọn ngẫu nhiên" nên ta có các trường hợp sau đây thuận lợi cho biến cố X.

Mỗi câu đúng có 1 phương án trả lời, mỗi câu sai có 3 phương án trả lời.

- 5 câu đúng – 5 câu sai: có $C_{10}^5.(3)^5$ khả năng thuận lợi.
- 6 câu đúng – 4 câu sai: có $C_{10}^6.(3)^4$ khả năng thuận lợi.
- 7 câu đúng – 3 câu sai: có $C_{10}^7.(3)^3$ khả năng thuận lợi.
- 8 câu đúng – 2 câu sai: có $C_{10}^8.(3)^2$ khả năng thuận lợi.
- 9 câu đúng – 1 câu sai: có $C_{10}^9.3$ khả năng thuận lợi.
- 10 câu đúng: có C_{10}^{10} khả năng thuận lợi.

Suy ra $n(X) = C_{10}^5.(3)^5 + C_{10}^6.(3)^4 + C_{10}^7.(3)^3 + C_{10}^8.(3)^2 + C_{10}^9.3 + C_{10}^{10} = 81922.$

Vậy xác suất cần tính $P=\frac{81922}{4^{10}}$.

Cách 2. Xác suất trả lời đúng 1 câu hỏi là $\frac{1}{4}$, trả lời sai là $\frac{3}{4}$. Ta có các trường hợp:

- Xác suất thí sinh A trả lời đúng 5 trên 10 câu là $C_{10}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}.\left(\frac{3}{4}\right)^{5}$
- Xác suất thí sinh A trả lời đúng 6 trên 10 câu là $C_{10}^{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}.\left(\frac{3}{4}\right)^{4}$
- Xác suất thí sinh A trả lời đúng 7 trên 10 câu là $C_{10}^{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{7}.\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$
- Xác suất thí sinh A trả lời đúng 8 trên 10 câu là $C_{10}^{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{8}.\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$
- Xác suất thí sinh A trả lời đúng 9 trên 10 câu là $C_{10}^{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{9}.\frac{3}{4}$
- Xác suất thí sinh A trả lời đúng 10 trên 10 câu là $C_{10}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$.

Cộng các xác suất trên ta được xác suất cần tính.

Câu 50 : Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, thí sinh An dự thi môn thi trắc nghiệm Toán. Đề thi gồm 50 câu hỏi; mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn; trong đó có 1 phương án đúng, làm đúng mỗi câu được $0,2$ điểm. Bạn An làm chắc chắn đúng 42 câu, trong 8 câu còn lại chỉ có 3 câu bạn loại trừ được mỗi câu một đáp án chắc chắn sai. Do không còn đủ thời gian nên An bắt buộc phải khoanh bừa các câu còn lại. Xác suất bạn An được $9,4$ điểm là bao nhiêu?

Lời giải

Ta chỉ quan tâm 8 câu còn lại. Trong 8 câu còn lại mình chia làm 2 loại:

- Loại 1: gồm 3 câu có 3 đáp án A, B, C

  Suy ra xác suất chọn đáp án đúng là $\frac{1}{3}$, xác suất chọn đáp án đúng là $\frac{2}{3}$.

- Loại 2: gồm 5 câu có 4 đáp án A, B, C, D

  Suy ra xác suất chọn đáp án đúng là $\frac{1}{4}$, xác suất chọn đáp án đúng là $\frac{3}{4}$.

Để bạn An đạt được 9,4 điểm (tức cần đúng thêm 5 câu trong 8 câu còn lại) thì xảy ra một trong các khả năng sau

- Đúng 0 câu loại 1 & Đúng 5 câu loại 3 suy ra xác suất $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\times C_{5}^{5}.\left(\frac{1}{4}\right)^{5}$.
- Đúng 1 câu loại 1 & Đúng 4 câu loại 3 suy ra xác suất $C_{3}^{1}.\frac{1}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\times C_{5}^{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^{4}.\frac{3}{4}$.

- Đúng 2 câu loại 1 & Đúng 3 câu loại 3 suy ra xác suất $C_3^2.\left(\frac{1}{3}\right)^2.\frac{2}{3}\times C_5^3.\left(\frac{1}{4}\right)^3.\left(\frac{3}{4}\right)^2$.
- Đúng 3 câu loại 1 & Đúng 2 câu loại 3 suy ra xác suất $C_3^3.\left(\frac{1}{3}\right)^3\times C_5^2.\left(\frac{1}{4}\right)^2.\left(\frac{3}{4}\right)^3$.

Cộng các xác suất lại ta được xác suất cần tính $P=\frac{499}{13824}$.

Câu 51: Có 12 người xếp thành một hàng dọc (vị trí của mỗi người trong hàng là cố định), Chọn ngẫu nhiên 3 người trong hàng. Tính xác suất để 3 người được chọn không có 2 người đứng nào cạnh nhau.

Lời giải

- Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{12}^3=220$.
- Giả sử chọn ba người có số thứ tự trong hàng lần lượt là m, n, p.

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} m<n<p \\ n-m>1 \\ p-n>1 \\ m,n,p\in\{1;2;...;12\} \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a=m \\ b=n-1 \\ c=p-2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a<b<c \\ b-a\ge 1 \\ c-b\ge 1 \\ 1\le a<b<c=p-2\le 10 \end{cases}$

$\Rightarrow a,b,c$ là ba số bất kì trong tập $\{1;2;3;...;10\}$ $\Rightarrow$Có C_{10}^3 cách chọn hay $n(A)=C_{10}^3=120$

Vậy xác suất là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{120}{220}=\frac{6}{11}$.

Câu 52: Có hai học sinh lớp A, ba học sinh lớp B và bốn học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh nào lớp B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy?

Lời giải

Xét các trường hợp sau:

- TH1: Hai học sinh lớp A đứng cạnh nhau có $2!.8!$ cách.
- TH2: Giữa hai học sinh lớp A có một học sinh lớp C có $2!.A_4^1.7!$ cách.
- TH3: Giữa hai học sinh lớp A có hai học sinh lớp C có $2!.A_4^2.6!$ cách.
- TH4: Giữa hai học sinh lớp A có ba học sinh lớp C có $2!.A_4^3.5!$ cách.
- TH5: Giữa hai học sinh lớp A có bốn học sinh lớp C có $2!.A_4^4.4!$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng có $2!\left(8!+A_4^1 7!+A_4^2 6!+A_4^3 5!+A_4^4 4!\right)=145152$ cách.

Câu 53: Từ các số $\{0;1;2;3;4;5;6\}$ viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Tính xác suất để viết được số thoả mãn điều kiện $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6$.

Lời giải

Ta dễ có số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.A_6^5 = 4320$.

Gọi A là biến cố "chọn được số thoả mãn yêu cầu bài toán". Khi đó ta có 3 phương án để chọn số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ như sau:

- Phương án 1: $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 5$. Khi đó

$$\{(a_1,a_2);(a_3,a_4);(a_5,a_6)\} \subset \{(0,5);(1,4);(2,3)\}.$$

+ Phương án 1.1: $(a_1,a_2) = (0,5) \Rightarrow$ có $2.(2!)^2$ cách chọn.

+ Phương án 1.2: $(a_1,a_2) \neq (0,5) \Rightarrow$ có $4.(2!)^3$ cách chọn.

Vậy có $2.(2!)^2 + 4.(2!)^3 = 40$ cách chọn.

- Phương án 2: $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 6$. Khi đó

$$\{(a_1,a_2);(a_3,a_4);(a_5,a_6)\} \subset \{(0,6);(1,5);(2,4)\}.$$

Phương án này hoàn toàn tương tự phương án 1 do đó có $2.(2!)^2 + 4.(2!)^3 = 40$ cách chọn.

Phương án 3: $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 7$. Khi đó

$$\{(a_1,a_2);(a_3,a_4);(a_5,a_6)\} \subset \{(1,6);(2,5);(3,4)\}$$

Suy ra có $3!.(2!)^3 = 48$ cách chọn.

Vậy số phần tử của A: $|A| = 40.2 + 48 = 128$. Suy ra $p = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{128}{4320} = \frac{4}{135}$.

Câu 54: Có 3 bi xanh, 3 bi đỏ, 3 bi trắng và 3 bi vàng (các viên bi cùng màu giống nhau). Hỏi có bao nhiêu cách xếp 12 viên bị thành một hàng ngang sao cho các bi cùng màu không cạnh nhau?

Lời giải

- Xếp 3 bi xanh trước: có 1 cách (tạo ra 4 khoảng trống kể cả hai đầu). Tiếp theo xếp 3 bi đỏ vào 4 khoảng trống: có C_4^3 cách. Bây giờ có tất cả 6 viên bi (gồm 3 bi xanh và 3 bi đỏ) tạo nên 7 khoảng trống, tiếp tục xếp 3 bi trắng vào 7 khoảng trống: có C_7^3 cách. Thời điểm này có tất cả 9 viên bi (gồm 3 bi xanh, 3 bi đỏ và 3 bi trắng), tiếp tục xếp 3 bi vàng vào 10 khoảng trống: có C_{10}^3 cách. Vậy có $1.C_4^3.C_7^3.C_{10}^3$ cách.
- Tuy nhiên khi xếp 3 bi xanh xong, kế tiếp xếp 3 bi đỏ vào 4 khoảng trống như đã trình bày ở trên thì có 2 trường hợp mà 2 bi xanh cạnh nhau

Đ	X		X	Đ	X	Đ

Đ	X	Đ	X		X	Đ

Ứng với mỗi trường hợp này sẽ kéo theo việc xếp bi trắng không thỏa mãn là C_6^3 và việc xếp bi vàng không thỏa mãn là C_{10}^3. Vậy số trường hợp không thỏa mãn (cần phải trừ ra) là $2.C_6^3.C_9^3$ cách.

Ta có $\begin{cases} n(\Omega) = \dfrac{12!}{3!.3!.3!.3!} \\ n(A) = 1.C_4^3.C_7^3.C_{10}^3 - 2.C_6^3.C_9^3 \end{cases} \Rightarrow P = \dfrac{2}{55}$

Câu 55: Có 6 viên bi gồm 2 bi xanh, 2 bi đỏ, 2 bi vàng (các viên bi bán kính khác nhau). Tính xác suất để khi xếp 6 bi trên thành một hàng ngang thì không có hai viên bi cùng màu nào đứng cạnh nhau.

Lời giải

Trường hợp 1. Có 3 cặp cạnh nhau: có $3!.2!.2!.2! = 48$ cách.

Trường hợp 2. Có 2 cặp cạnh nhau

- Khả năng thứ nhất: Cặp xanh cạnh cặp đỏ

Ta xem cặp xanh như 1 vị trí, cặp đỏ như 1 vị trí cùng với 2 viên bi vàng nên có $4!$ cách xếp. Hai viên bi trong cặp bi xanh đổi vị trí nên có $2!$ cách, hai viên bi trong cặp bi đỏ đổi vị trí nên có $2!$ cách. Nhưng ta đếm thế này là thừa trường hợp 3 cặp bi cạnh nhau.

Do đó khả năng thứ nhất có $4!.2!.2! - 48 = 48$ cách.

- Khả năng thứ hai: Cặp xanh cạnh cặp vàng có 48 cách.
- Khả năng thứ ba: Cặp đỏ cạnh cặp vàng có 48 cách.

Vậy trường hợp 2 có $48 + 48 + 48 = 144$ cách.

Trường hợp 3. Có 1 cặp cạnh nhau

- Khả năng thứ nhất: Chỉ có 2 viên bi xanh cạnh nhau

Ta xem cặp xanh như 1 vị trí, cùng với 2 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng nên có $5!$ cách xếp. Hai viên bi trong cặp bi xanh đổi vị trí nên có $2!$ cách. Nhưng ta đếm thế này là thừa trường hợp 2 cặp bi cạnh nhau (cặp xanh cạnh cặp đỏ & cặp xanh cạnh cặp vàng) và trường hợp 3 cặp bi cạnh nhau.

Do đó khả năng thứ nhất có $5!.2! - (2.48) - 48 = 96$ cách.

- Khả năng thứ hai: Chỉ có 2 viên bi đỏ cạnh nhau có 96 cách.
- Khả năng thứ ba: Chỉ có 2 viên bi vàng cạnh nhau có 96 cách.

Vậy trường hợp 3 có $96 + 96 + 96 = 288$ cách.

Suy ra số cách xếp 6 bi thỏa mãn bài toán là $6! - 48 - 144 - 288 = 240$ cách.

Nhận xét. Bài này ta không thể làm như bài trước được vì các viên bi khác nhau.

Ta có $\begin{cases} n(\Omega) = 6! \\ n(A) = 240 \end{cases} \Rightarrow P = \dfrac{1}{3}$

Câu 56: Có 2 học sinh lớp A, 3 học sinh lớp B và 4 học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh lớp B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy ?

Lời giải

Gọi k là số học sinh lớp C ở giữa hai học sinh lớp A với $k = 0;1;2;3;4$.

Trước tiên ta đếm cách tạo thành cụm $A\underbrace{CC...C}_{k}A$.

- Chọn 2 học sinh lớp A xếp 2 đầu có $2!$ cách. Chọn k học sinh lớp C xếp vào giữa hai học sinh lớp A có A_4^k cách. Do đó có $2!.A_4^k$ cách tạo ra cụm $A\underbrace{CC...C}_{k}A$.
- Coi cụm $A\underbrace{CC...C}_{k}A$ là một vị trí cùng với $9-(k+2)$ học sinh còn lại thành $8-k$ vị trí. Xếp hàng cho các vị trí này có $(8-k)!$ cách.

Vậy với mỗi k như trên có $2!.A_4^k.(8-k)!$ cách xếp hàng.

Suy ra số cách xếp hàng thỏa mãn đề bài là: $\sum_{k=0}^{4} 2!.A_4^k.(8-k)! = 145152$ cách.

Câu 57: Cho một đa giác lồi (H) có 30 đỉnh. Gọi ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác đó. Gọi P là xác suất sao cho 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H). Tìm P.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{30}^4$.

Gọi A: "4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác có bốn cạnh đều là đường chéo của (H)".

Để chọn ra một tứ giác thỏa mãn đề bài ta làm như sau:

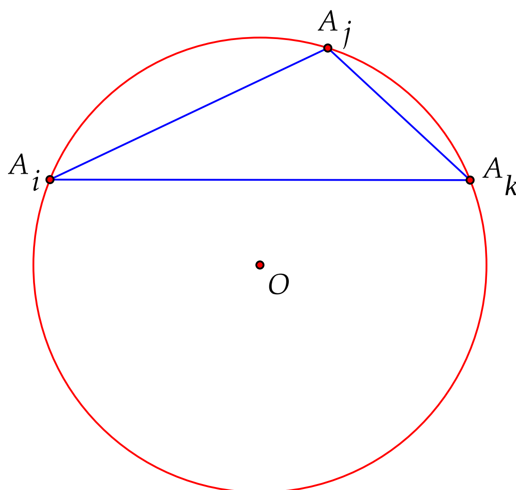
- Bước 1: Chọn đỉnh đầu tiên của tứ giác, có 30 cách.
- Bước 2: Chọn 3 đỉnh còn lại sao cho hai đỉnh bất kỳ của tứ giác cách nhau ít nhất 1 đỉnh. Điều này tương đương với việc ta phải chia $m=30$ chiếc kẹo cho $n=4$ đứa trẻ sao cho mỗi đứa trẻ có ít nhất $k=2$ cái, có $C_{m-n(k-1)-1}^{n-1} = C_{25}^3$ cách, nhưng làm như thế mỗi tứ giác lặp lại 4 lần.

$\Rightarrow$ Số phần tử của biến cố A là $n(A) = \frac{30.C_{25}^3}{4}$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\frac{30.C_{25}^3}{4}}{C_{30}^4} = \frac{1150}{1827} \approx 0,6294$.

Câu 58: Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn $100°$?

Lời giải



Gọi $A_1, A_2, \ldots, A_{2018}$ là các đỉnh của đa giác đều 2018 đỉnh.

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều $A_1A_2...A_{2018}$.

Các đỉnh của đa giác đều chia (O) thành 2018 cung tròn bằng nhau, mỗi cung tròn có số đo bằng $\frac{360°}{2018}$.

Vì tam giác cần đếm có đỉnh là đỉnh của đa giác nên các góc của tam giác là các góc nội tiếp của (O).

Suy ra góc lớn hơn $100°$ sẽ chắn cung có số đo lớn hơn $200°$. Cố định một đỉnh A_i. Có 2018 cách chọn A_i.

Gọi A_i, A_j, A_k là các đỉnh sắp thứ tự theo chiều kim đồng hồ sao cho cung nhỏ $A_iA_k < 160°$ thì cung lớn $A_iA_k > 360 - 160° = 200°$ $\Rightarrow A_iA_jA_k > 100°$ và tam giác $A_iA_jA_k$ là tam giác cần đếm. Khi đó A_iA_k là hợp liên tiếp của nhiều nhất $\left[\frac{160}{\frac{360}{2018}}\right] = 896$ cung tròn nói trên.

896 cung tròn này có 897 đỉnh. Trừ đi đỉnh A_i thì còn 896 đỉnh. Do đó có C_{896}^2 cách chọn hai đỉnh A_j, A_k.

Vậy có tất cả $2018.C_{896}^2$ tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Phân tích sai lầm khi giải bài tập này:

Giả sử $A_mA_nA_p > 100°$ thì cung A_mA_p (không chứa điểm A_n) sẽ có số đo lớn hơn $200°$.

Tức là cung A_mA_p (không chứa điểm A_n) sẽ là hợp liên tiếp của ít nhất $\left[\dfrac{200}{\dfrac{360}{2018}}\right]+1=1122$ cung tròn bằng nhau nói trên.

Từ đó ta có cách dựng tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau:

- Bước 1: Đánh dấu một cung tròn là hợp liên tiếp của 1122 cung tròn bằng nhau nói trên. Có 2018 cách đánh dấu.
- Bước 2: Trong $2018-1121=897$ điểm không thuộc cung tròn ở bước 1 (bao gồm cả hai điểm đầu mút của cung), chọn ra 3 điểm bất kì, có C_{897}^3 cách chọn, 3 điểm này sẽ tạo thành tam giác có một góc lớn hơn $100°$.

Vậy có tất cả $2018.C_{897}^3$ tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách lập luận này là không chính xác, vì ta chưa trừ đi các trường hợp trùng nhau!

Câu 59: Có bao nhiêu số tự nhiên có 2018 chữ số sao cho trong mỗi số tổng các chữ số bằng 5?

Lời giải

Vì $5=4+1=3+2=2+2+1=3+1+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$ nên ta có các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Số tự nhiên có một chữ số 5 đứng đầu và 2017 số 0 đứng sau: Có 1 số.
- Trường hợp 2: Số tự nhiên có một chữ số 4, một chữ số 1 và 2016 số 0.

+ Khả năng 1: Nếu số 4 đứng đầu thì số 1 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

+ Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu thì số 4 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

- Trường hợp 3: Số tự nhiên có một chữ số 3, một chữ số 2 và 2016 số 0

+ Khả năng 1: Nếu số 3 đứng đầu thì số 2 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

+ Khả năng 2: Nếu số 2 đứng đầu thì số 3 đứng ở một trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^1 số.

- Trường hợp 4: Số tự nhiên có hai chữ số 2, một chữ số 1 và 2015 số 0

+ Khả năng 1: Nếu số 2 đứng đầu thì số 1 và số 2 còn lại đứng ở hai trong 2017 vị trí còn lại nên ta có A_{2017}^2 số.

+ Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu thì hai chữ số 2 đứng ở hai trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^2 số.

- Trường hợp 5: Số tự nhiên có 2 chữ số 1, một chữ số 3 thì tương tự như trường hợp 4 ta có $A_{2017}^2 + C_{2017}^2$ số.
- Trường hợp 6: Số tự nhiên có một chữ số 2, ba chữ số 1 và 2014 số 0.

+ Khả năng 1: Nếu số 2 đứng đầu thì ba chữ số 1 đứng ở ba trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^3 số.

+ Khả năng 2: Nếu số 1 đứng đầu và số 2 đứng ở vị trí mà không có số 1 nào khác đứng trước nó thì hai số 1 còn lại đứng ở trong 2016 vị trí còn lại nên ta có C_{2016}^2 số.

+ Khả năng 3: Nếu số 1 đứng đầu và số 2 đứng ở vị trí mà đứng trước nó có hai số 1 thì hai số 1 và 2 còn lại đứng ở trong 2016 vị trí còn lại nên ta có A_{2016}^2 số.

- Trường hợp 7: Số tự nhiên có năm chữ số 1 và 2013 số 0, vì chữ số 1 đứng đầu nên bốn chữ số 1 còn lại đứng ở bốn trong 2017 vị trí còn lại nên ta có C_{2017}^4 số.

Áp dụng quy tắc cộng ta có $1 + 4C_{2017}^1 + 2\left(C_{2017}^2 + A_{2017}^2\right) + \left(C_{2017}^3 + A_{2016}^2 + C_{2016}^2\right) + C_{2017}^4$ số cần tìm.

Câu 60: Có 1 viên bi xanh, 2 viên bi vàng và 3 viên bi đỏ (các viên bi có bán kính khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 viên bi thành một hàng ngang sao cho các viên bi cùng màu không xếp cạnh nhau ?

Lời giải

Ta đánh số thứ tự các ô cần xếp bi.

I	II	III	IV	V	VI

- Trường hợp thứ nhất.

Bi màu đỏ ở các vị trí I, III, V nên có $3!$ cách.

Bi màu vàng và màu xanh ở các vị trí còn lại II, IV, VI nên cũng có $3!$ cách.

Do đó trong tường hợp này có $3!.3! = 36$ cách.

- Trường hợp thứ hai (như trường hợp thứ nhất)

Bi màu đỏ ở các vị trí II, IV, VI nên có $3!$ cách.

Bi màu vàng và màu xanh ở các vị trí còn lại I, III, V nên cũng có $3!$ cách.

Do đó trong tường hợp này có $3!.3! = 36$ cách.

- Trường hợp thứ ba

Bi màu đỏ ở các vị trí I, III, VI nên có $3!$ cách.

Bi màu vàng và màu xanh ở tùy ý các vị trí còn lại thì có $3!$ cách nhưng trong đó có vị trí $\text{II}(x) - \text{IV}(v) - \text{V}(v)$ không thỏa mãn.

Do đó trong tường hợp này có $3!.(3! - 2) = 24$ cách.

- Trường hợp thứ tư (như trường hợp thứ ba)

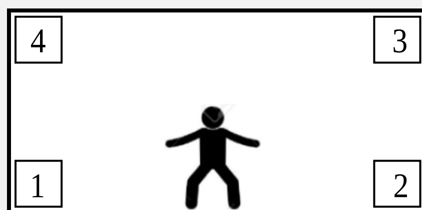
Bi màu đỏ ở các vị trí I, IV, VI nên có $3!$ cách.

Bi màu vàng và màu xanh ở tùy ý các vị trí còn lại thì có $3!$ cách nhưng trong đó có vị trí $II(v)-III(v)-V(x)$ không thỏa mãn.

Do đó trong tường hợp này có $3!.(3!-2)=24$ cách.

Vậy có tất cả $36+24+36+24=120$ cách thỏa mãn bài toán.

Câu 61: Trong trận đấu bóng đá giữa 2 đội Real madrid và Barcelona, trọng tài cho đội Barcelona được hưởng một quả Penalty. Cầu thủ sút phạt ngẫu nhiên vào 1 trong bốn vị trí 1, 2, 3, 4 và thủ môn bay người cản phá ngẫu nhiên đến 1 trong 4 vị trí 1, 2, 3, 4 với xác suất như nhau (thủ môn và cầu thủ sút phạt đều không đoán được ý định của đối phương). Biết nếu cầu thủ sút và thủ môn bay cùng vào vị trí 1 (hoặc 2) thì thủ môn cản phá được cú sút đó, nếu cùng vào vị trí 3 (hoặc 4) thì xác suất cản phá thành công là 50%. Tính xác suất của biến cố "cú sút đó không vào lưới"?



Lời giải

Cách 1:

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=4.4=16$

Gọi biến cố A = "Cú sút đó không vào lưới"

Khi đó biến cố $\overline{A}$ = "Cú sút đó vào lưới"

Số phần tử của $n(\overline{A})$ là

- Trường hợp 1: Cầu thủ sút vào vị trí 1 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại. Cầu thủ có 1 cách sút. Thủ môn có 3 cách bay. Do đó, có 3 khả năng xảy ra
- Trường hợp 2: Cầu thủ sút vào vị trí 2 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại. Cầu thủ có 1 cách sút. Thủ môn có 3 cách bay. Do đó, có 3 khả năng xảy ra
- Trường hợp 3: Cầu thủ sút vào vị trí 3 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại. Cầu thủ có 1 cách sút. Thủ môn có 3 cách bay. Do đó, có 3 khả năng xảy ra
- Trường hợp 4: Cầu thủ sút vào vị trí 4 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại. Cầu thủ có 1 cách sút. Thủ môn có 3 cách bay. Do đó, có 3 khả năng xảy ra. Trường hợp 5: Cầu thủ sút vào vị trí 3 thủ môn bay vào vị trí 3. Cầu thủ có 1 cách sút. Thủ môn có 1 cách bay. Do đó, có 1 khả năng xảy ra
- Trường hợp 6: Cầu thủ sút vào vị trí 4 thủ môn bay vào vị trí 4. Cầu thủ có 1 cách sút. Thủ môn có 1 cách bay. Do đó, có 1 khả năng xảy ra

Khi đó $n(\overline{A})=4.3+2.1=14$.

Xác suất xảy ra biến cố $\overline{A}$ là $p\left(\overline{A}\right)=\frac{4.3}{16}+\frac{2.1}{16}.\frac{1}{2}=\frac{13}{16}$ (Do 2 trường hợp 5, 6 thì xác suất xảy ra chỉ là 50%). Vậy $p(A)=1-p\left(\overline{A}\right)=1-\frac{13}{16}=\frac{3}{16}$.

Cách 2:

Gọi A_i là biến cố "cầu thủ sút phạt vào vị trí i "

B_i là biến cố "thủ môn bay người cản phá vào vị trí thứ i "

Và C là biến cố "Cú sút phạt không vào lưới"

Dễ thấy $P(A_i)=P(B_i)=\frac{1}{4}$. Ta có

$$P(C)=P(A_1)P(B_1)+P(A_2)P(B_2)+\frac{1}{2}P(A_3)P(B_3)+\frac{1}{2}P(A_4)P(B_4)$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{16}.$$

Câu 62: Trong một lớp có n học sinh có ba bạn A,B,C cùng $n-3$ học sinh khác. Khi xếp tùy ý n học sinh này vào một dãy ghế dài có đánh số từ 1 đến n (mỗi học sinh ngồi một ghế). Xác suất để số ghế của A bằng trung bình cộng số ghế của B và C bằng $\frac{13}{675}$. Tìm n ?

Lời giải

Số cách xếp tùy ý là $n!$. Ta tìm số cách xếp thỏa mãn; giả sử số ghế của A,B,C lần lượt là a,b,c. Theo giả thiết ta có $a=\frac{b+c}{2}\Leftrightarrow b+c=2a$. Do đó b và c cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Ta xét 2 khả năng của n.

Trường hợp 1: $n=2m$

- Nếu b,c chẵn có $A_{\frac{n}{2}}^2$ cách xếp B và C; 1 cách xếp A và $(n-3)!$ cách xếp học sinh khác.
- Nếu b,c lẻ có $A_{\frac{n}{2}}^2$ cách xếp B và C; 1 cách xếp A và $(n-3)!$ cách xếp học sinh khác.

Vậy xác suất cần tính là:

$$\frac{2(n-3)!A_{\frac{n}{2}}^2}{n!}=\frac{2(2m-3)!\frac{m!}{(m-2)!}}{(2m)!}=\frac{2m(m-1)}{2m(2m-1)(2m-2)}=\frac{13}{675}\Leftrightarrow m=\frac{701}{52}$$

Trường hợp này không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $n=2m+1$

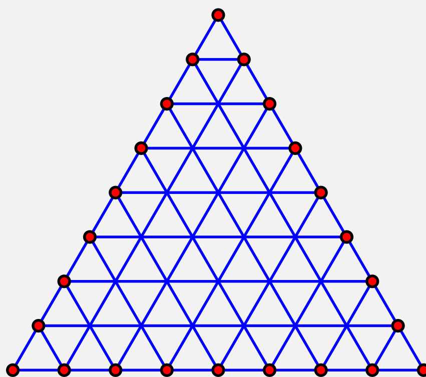
- Nếu b,c chẵn có A_m^2 cách xếp B và C; 1 cách xếp A và $(2m-2)!$ cách xếp học sinh khác.
- Nếu b,c lẻ có A_{m+1}^2 cách xếp B và C; 1 cách xếp A và $(2m-2)!$ cách xếp học sinh khác.

Vậy xác suất cần tính là:

$$\frac{(2m-2)!\left[A_m^2+A_{m+1}^2\right]}{(2m+1)!}=\frac{m(m-1)+(m+1)m}{(2m+1)(2m)(2m-1)}=\frac{13}{675}\Leftrightarrow m=13\Rightarrow n=27$$

Vậy $n=27$

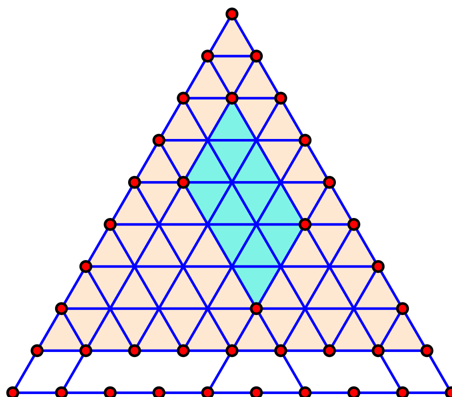
Câu 63: Cho tam giác đều H có cạnh bằng 8. Chia tam giác này đều thành 64 tam giác đều có cạnh bằng 1 bởi các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác đều đã cho. Gọi S là tập hợp các đỉnh của 64 tam giác đều có cạnh bằng 1. Chọn Ngẫu nhiên 4 đỉnh của tập S. Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được là bốn đỉnh của một hình bình hành nằm trong miền trong tam giác đều H.



Lời giải

Cách 1:

Ta thấy có 3 loại hình bình hành dựa vào cách chọn phương của hai cạnh của hình bình hành. Số hình bình hành của mỗi loại là bằng nhau nên chỉ cần tính một loại rồi nhân với 3.



Dựng thêm một đường thẳng song song với cạnh đáy và cách cạnh đáy một khoảng bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song kề nhau, tạo thành một tam giác đều mở rộng như hình vẽ. Ta chia cạnh mới thành 9 phần bằng nhau bởi 8, cộng thêm 2 đầu mút nữa thành 10 điểm. Các điểm được đánh số từ trái sang phải từ 1 đến 10.

Khi đó, với 1 hình bình hành có hai cạnh song song với hai cạnh bên tương ứng với bốn số $1\le a<b<c<d\le 10$ theo quy tắc sau: Nối dài các cạnh của hình bình hành, cắt các cạnh

mới tại 4 điểm có số thứ tự là a, b, c, d. Ví dụ với hình bình hành màu đỏ trên ta có bộ $(2,5,7,9)$. Ngược lại nếu có một bộ số $1 \le a < b < c < d \le 10$ ta sẽ kẻ các đường thẳng từ điểm a, b song song với cạnh bên trái và từ c, d song song với cạnh bên phải giao nhau ra một hình bình hành.

Vậy số hình bình hành loại này là số cách lấy ra bốn số phân biệt $(a;b;c;d)$ từ 10 số tự nhiên $\{1,2,3,...,10\}$ và ta được $C_{10}^4 = 210$.

Vậy kết quả là $3.C_{10}^4 = 630$ hình bình hành.

Ta thấy có $1+2+3+...+9=45$ giao điểm giữa các đường thẳng nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{45}^4$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{3C_{10}^4}{C_{45}^4} = \dfrac{2}{473}$.

Cách 2: Để chọn được một hình bình hành mà 4 đỉnh chọn được là bốn đỉnh của một hình bình hành nằm trong miền trong tam giác đều H ta làm như sau:

Chọn 2 trong 7 điểm trên một cạnh (trừ hai điểm đầu mút của cạnh), cùng với hai điểm trong 5 điểm nằm tương ứng trên một cạnh trong hai cạnh còn lại của tam giác (trừ mỗi đầu cạnh đi 2 điểm). Qua 4 điểm này có 4 đường thẳng tương ứng của đầu bài sẽ cắt nhau tạo thành một hình bình hành thỏa mãn bài toán.

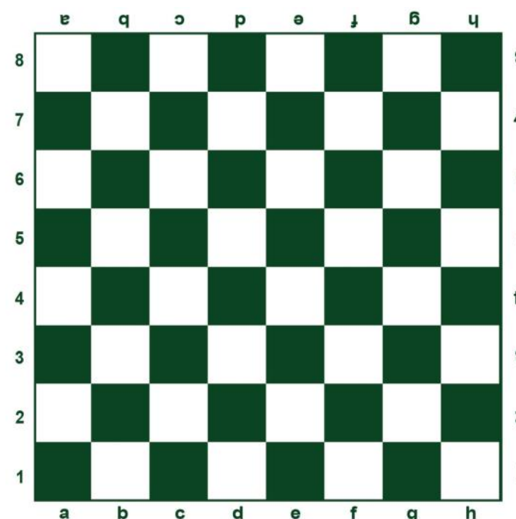
Vì vài trò các cạnh như nhau nên số hình bình hành thu được là: $C_7^2.C_5^2.3 = 630$ (hình).

Ta thấy có $1+2+3+...+9=45$ giao điểm giữa các đường thẳng nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{45}^4$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{3C_{10}^4}{C_{45}^4} = \dfrac{2}{473}$.

Câu 64: Có tất cả bao nhiêu hình chữ nhật trên bàn cờ vua 8x8 ?

Lời giải



Số các hình chữ nhật chỉ chứa 1 ô vuông là 64. Số cách chọn ra 2 ô vuông phân biệt trong 64 ô vuông này là $C_{64}^2 = 2016$. Trong đó số cách chọn 2 ô thuộc cùng 1 hàng hoặc 1 cột là $16C_8^2$. Suy ra có 448 hình chữ nhật mà có chiều rộng là 1(các ô vuông của nó cùng thuộc 1 hàng hoặc 1 cột). Vậy số cách chọn 2 ô vuông mà không cùng hàng hay cột là:

$$2016 - 448 = 1568$$

Nhận xét: Với 2 ô vuông không cùng hàng cùng cột ta có thể tạo ra 1 hình chữ nhật bằng cách chiếu

Các đường song song với các cạnh của bàn cờ và đi qua 2 ô vuông đó. Cụ thể như sau: Với 2 ô vuông C5 và F3 thì ta có thể tạo thành hình chữ nhật có 4 đỉnh là: C5; C3; F3; F5. Như vậy mỗi hình chữ nhật có thể được tạo ra bởi 2 cặp ô vuông không cùng hàng cùng cột. Do đó số hình chữ nhật trong trường hợp này là $\frac{1568}{2}=784$ hình chữ nhật.

Câu 65 : Có 5 học sinh nam, 8 học sinh nữ và 1 thầy giáo được xếp ngẫu nhiên vào một bàn tròn. Xác suất để thầy giáo xếp giữa hai học sinh nữ bằng

Lời giải

- **Bước 1.** Ta cố định thầy giáo.
- **Bước 2.** Chọn lấy 2 học sinh nữ để xếp cạnh thầy giáo có C_8^2 cách.
- **Bước 3.** Xếp 2 học sinh nữ vừa chọn cạnh thầy giáo có $2!$ cách.
- **Bước 4.** Cuối cùng xếp 11 người còn lại vào 11 vị trí còn lại có $11!$ cách.

Câu 66 : Cho n giác đều nội tiếp đường tròn (O). Hỏi có bao nhiêu hình thang không là hình chữ nhật mà 4 đỉnh là đỉnh của đa giác đã cho ?

Lời giải

Gọi mỗi cung chứa một cạnh của đa giác đều trên đường tròn là 1 đơn vị (có n cung như vậy). Xét một hình thang thỏa mãn mà đỉnh đầu tiên chứa đáy nhỏ là A_i, các đỉnh tiếp theo theo thứ tự thuận chiều kim đồng hồ. Gọi x,y,z,t lần lượt là số đo các cung chứa đáy nhỏ, hai cạnh bên và đáy lớn của hình thang, ta có $\begin{cases}1\le x,y,z\in\mathbb{Z}\\ x<z\\ x+2y+z=n(*)\end{cases}$

Ta có phương trình $(*)$ tương đương với $x+z=n-2y(**)$ với mỗi y thỏa mãn điều kiện $1\le y<\frac{n-2}{2}$. Theo bài toán chia kẹo Euler phương trình $(**)$ có $(n-2y-1)$ nghiệm nguyên dương. Bây giờ ta đếm các nghiệm nguyên dương của $(**)$ mà $x<z$.

- Nếu n lẻ thì $(**)$ không có nghiệm $x=z$ nên số nghiệm thỏa mãn điều kiện $x<z$ là $\frac{n-2y-1}{2}$
- Nếu n chẵn thì $(**)$ có đúng 1 nghiệm $x=z$ nên số nghiệm thỏa mãn điều kiện $x<z$ là $\frac{n-2y-2}{2}$

Số nghiệm của $(*)$ thỏa mãn các ràng buộc đã cho là :

$$\begin{cases}\sum_{y=1}^{\frac{n-3}{2}}\frac{n-2y-1}{2}=\frac{1}{8}(n-1)(n-3)(n=2m+1,m\in\mathbb{N})\\ \sum_{y=1}^{\frac{n-4}{2}}\frac{n-2y-2}{2}=\frac{1}{8}(n-2)(n-4)(n=2m,m\in\mathbb{N}^*)\end{cases}$$

Với mỗi bộ số x,y,z thỏa mãn $(*)$ xuất phát từ 1 đỉnh của đa giác là đỉnh đầu tiên của đáy nhỏ hình thang ứng với cạnh x theo chiều thuận kim đồng hồ ta có 1 hình thang thỏa mãn.

Vậy tổng số hình thang thỏa mãn là $\begin{cases}\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)(n=2m+1,m\in\mathbb{N})\\ \frac{1}{8}n(n-2)(n-4)(n=2m,m\in\mathbb{N}^*)\end{cases}$

Áp dụng vào bài toán ứng với $n=20$ tức đa giác đều 20 cạnh, số hình thang không phải hình chữ nhật tạo thành từ các đỉnh của đa giác là $\frac{1}{8}.20.18.16=720$

Câu 67: Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc A, tính xác suất để số tự nhiên được chọn chia hết cho 45.

Lời giải

Ta có $n(\Omega)=A_{10}^{8}-A_{9}^{7}$.

Gọi A là tập hợp các số a có 8 chữ số khác nhau chia hết cho 45.

Khi đó a chia hết cho 5 và 9 (tổng các chữ số chia hết cho 9 và số hàng đơn vị bằng 0 hoặc 5).

- Trường hợp 1: a có hàng đơn vị bằng 0; 7 chữ số còn lại có chữ số 9 và 3 trong 4 bộ số $\{1;8\}$, $\{2;7\}$, $\{3;6\}$, $\{4;5\}$, có $4.7!$ số.
- Trường hợp 2: a có hàng đơn vị bằng 5; 7 chữ số còn lại có chữ số 4 và 3 trong 4 bộ số $\{0;9\}$, $\{1;8\}$, $\{2;7\}$, $\{3;6\}$.

Không có bộ $\{0;9\}$, có $7!$ số.

Có bộ $\{0;9\}$, có $C_3^2(7!-6!)$ số

$\Rightarrow n(A)=4.7!+C_3^2(7!-6!)$ số $\Rightarrow P(A)=\frac{4.7!+C_3^2(7!-6!)}{A_{10}^{8}-A_{9}^{7}}=\frac{53}{2268}$.

Câu 68 : Một khối lập phương có độ dài cạnh là $2cm$ được chia thành 8 khối lập phương cạnh $1cm$. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các đỉnh của khối lập phương cạnh $1cm$.

Lời giải

Có tất cả 27 điểm.

Chọn 3 điểm trong 27 có $C_{27}^{3}=2925$.

Có tất cả $(8.2+6.2+4.2+4+3+2+2+2)=49$ bộ ba điểm thẳng hàng.

Vậy có $2925-49=2876$ tam giác.

Câu 69: Hai người ngang tài ngang sức tranh chức vô địch của một cuộc thi cờ tướng. Người giành chiến thắng là người đầu tiên thắng được năm ván cờ. Tại thời điểm người chơi thứ nhất đã thắng 4 ván và người chơi thứ hai mới thắng 2 ván, tính xác suất để người chơi thứ nhất giành chiến thắng.

Lời giải

Theo giả thiết hai người ngang tài ngang sức nên xác suất thắng thua trong một ván đấu là $0,5;0,5$.

Xét tại thời điểm người chơi thứ nhất đã thắng 4 ván và người chơi thứ hai thắng 2 ván.

Để người thứ nhất chiến thắng thì người thứ nhất cần thắng 1 ván và người thứ hai thắng không quá hai ván. Có ba khả năng:

- TH1: Đánh 1 ván. Người thứ nhất thắng xác suất là $0,5$.
- TH2: Đánh 2 ván. Người thứ nhất thắng ở ván thứ hai xác suất là $(0,5)^2$.
- TH3: Đánh 3 ván. Người thứ nhất thắng ở ván thứ ba xác suất là $(0,5)^3$.

Vậy $P=0,5+(0,5)^2+(0,5)^3=\frac{7}{8}$.

Câu 70: Cho 100 tờ vé số trong đó có 20 vé trúng thưởng 50 ngàn, 10 vé trúng thưởng 100 ngàn , 5 vé trúng thưởng 150 ngàn và 65 vé không trúng thưởng. Tính xác suất để mua 4 vé trúng thưởng 200 ngàn ?

Lời giải

Số cách mua ngẫu nhiên 4 vé số là C_{100}^4

Gọi $x_1,x_2,x_3,x_4\,(0\le x_1,x_2,x_3,x_4\le 4)$ lần lượt là các vé số trúng thưởng 50 ngàn, 100 ngàn, 150 ngàn và không trúng thưởng được mua trong 4 vé.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}50x_1+100x_2+150x_3+0x_4=200\\ x_1+x_2+x_3+x_4=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4\\ x_1+x_2+x_3+x_4=4\end{cases}$

$\Rightarrow 3x_3\le 4\Rightarrow x_3\in\{0;1\}$

- Nếu $x_3=1\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2=1\\ x_1+x_2+x_4=4\end{cases}\Rightarrow(x_1;x_2;x_3;x_4)=(1;0;1;2)$
- Nếu $x_3=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2=4\\ x_1+x_2+x_4=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=x_4\\ x_1+2x_2=4\end{cases}$

  $\Rightarrow(x_1;x_2;x_3;x_4)=(4;0;0;0);(2;1;0;1);(0;2;0;2)$

Suy ra số cách mua là $C_{20}^1C_{10}^0C_5^1C_{65}^2+C_{20}^4C_{10}^0C_5^0C_{65}^0+C_{20}^2C_{10}^1C_5^0C_{65}^1+C_{20}^0C_{10}^2C_5^0C_{65}^2$

Vậy xác suất cần tính là $\frac{28663}{261415}$

Câu 71 : Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác đều đã cho và có một góc lớn hơn 120 độ ?

Lời giải

Số đo góc ở tâm ứng với mỗi cạnh của đa giác đều là $\frac{2\pi}{2018}(\text{rad})$, góc nội tiếp bằng 1 nửa góc ở tâm. Để chọn 1 tam giác có 1 góc lớn hơn 120 độ ta làm như sau.

Chọn 1 đỉnh làm đỉnh có góc lớn hơn 120^o có C_{2018}^1 cách, giả sử đỉnh này là A.

Với 2 đỉnh còn lại giả sử là B và C số đo góc B và C lần lượt là $\frac{2\pi x}{2.2018}, \frac{2\pi y}{2.2018}(x, y \geq 1)$, Số đo góc A là $\pi - \left(\frac{2\pi x}{2.2018} + \frac{2\pi y}{2.2018}\right) > \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x + y < \frac{2018}{3} \Leftrightarrow x + y \leq 672 \Leftrightarrow x + y + z = 673$ với $z \geq 1, z \in \mathbb{N}$. Số cách chọn hai đỉnh B và C bằng số cách chọn nghiệm nguyên dương của phương trình $x + y + z = 673$ và bằng C_{672}^2

Vậy số tam giác thỏa mãn yêu cầu đề bài là $2018C_{672}^2$

Câu 72 : Xét một bảng ô vuông gồm 4×4 ô vuông. Người ta điền vào mỗi ô vuông đó một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách?

Lời giải

Nhận xét 1: Trên mỗi hàng có 2 số 1 và 2 số -1, mỗi cột có 2 số 1 và 2 số -1

Nhận xét 2: Để tổng các số trong mỗi hàng và trong mỗi cột bằng 0 đồng thời có không quá hai số bằng nhau và ba hàng đầu tiên đã được xếp số thì ta chỉ có một cách xếp hàng thứ tự.

Do vậy ta tìm số cách xếp ba hàng đầu tiên. Phương pháp giải bài này là xếp theo hàng. (Hình vẽ). Các hàng được đánh số như sau:

Hàng 1				
Hàng 2				
Hàng 3				
Hàng 4				

Nếu xếp tự do thì mỗi hàng đều có $\frac{4!}{2!.2!} = 6$ cách điền số mà tổng các số bằng 0, đó là các cách xếp như sau (Ta gọi là các bộ số từ (1) đến (6)):

$$11-1-1\ (1),\ 1-1-11\ (2), -1-111\ (3), -11-11\ (4), 1-11-1\ (5), -111-1\ (6)$$

Giả sử hàng 1 được xếp như bộ (1). Số cách xếp hàng 2 có các khả năng sau

- Khả năng 1: Hàng 2 xếp giống hàng 1: Có 1 cách xếp (bộ (1)).

Hàng 3 có 1 cách (bộ (3)). Hàng 4 có 1 cách. Vậy có $1.1.1.1 = 1$ cách xếp.

- Khả năng 2: Hàng 2 xếp đối xứng với hàng 1: Có 1 cách xếp (bộ (3))

Hàng 3 có 6 cách (lấy thoải mái từ các bộ vì tổng hai hàng trên đã bằng 0). Hàng 4 có 1 cách. Vậy có $1.1.6.1 = 6$ cách xếp.

- Khả năng 3: Hàng 2 xếp trùng với cách xếp hàng 1 ở 2 vị trí: Có 4 cách xếp (4 bộ còn lại)

Khi đó, với mỗi cách xếp hàng thứ 2, hàng 3 có 2 cách.Hàng 4 có 1 cách. Vậy có $1.1.6.1 = 6$ cách xếp.

Vì vai trò các bộ số như nhau nên số cách xếp thỏa mãn ycbt là $6.(1+6+6) = 90$ cách.

Câu 73: Thầy X có 15 cuốn sách gồm 4 cuốn sách toán, 5 cuốn sách lí và 6 cuốn sách hóa. Các cuốn sách đôi một khác nhau. Thầy X chọn ngẫu nhiên 8 cuốn sách để làm phần thưởng cho một học sinh. Tính xác suất để số cuốn sách còn lại của thầy X có đủ 3 môn.

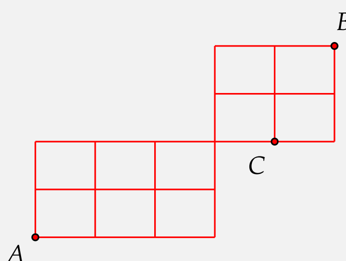
Lời giải

Gọi A là biến cố "Số cuốn sách còn lại của thầy X có đủ 3 môn", suy ra $\overline{A}$ là biến cố "Số cuốn sách còn lại của thầy X không có đủ 3 môn"= "Thầy X đã lấy hết số sách của một môn học".

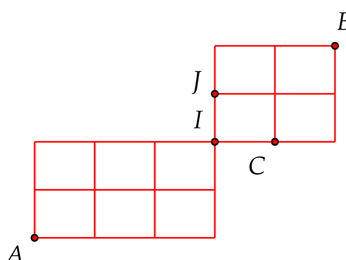
Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{15}^{8} = 6435$

$$n(\overline{A}) = C_4^4.C_{11}^4 + C_5^5.C_{10}^3 + C_6^6.C_9^2 = 486 \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{54}{715} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{661}{715}$$

Câu 74 : Một con thỏ di chuyển từ địa điểm A đến địa điểm B bằng cách qua các điểm nút (trong lưới cho ở hình vẽ) thì chỉ di chuyển sang phải hoặc đi lên (mỗi cách di chuyển như vậy xem là một cách đi). Biết nếu thỏ di chuyển đến nút C thì bị cáo ăn thịt, tính xác suất để thỏ đến được vị trí B .



Lời giải



Chú ý : Nếu di chuyển trên lưới theo hướng lên trên hoặc sang ngang thì đi từ $O(0;0)$ đến $A(m;n)$ sẽ có $C_{m+n}^{m}=C_{m+n}^{n}$ cách.

Số cách di chuyển từ A đến I là C_5^2, số cách di chuyển từ I đến B là C_4^2.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=C_5^2.C_4^2=60$.

Gọi X là biến cố thỏ đến được vị trí B.

Số cách di chuyển từ A đến I là C_5^2, số cách di chuyển từ I đến J là 1 cách, số cách di chuyển từ J đến B là C_3^1.Ta có $n(X)=C_5^2.1.C_3^1=30$.

Vậy $P(X)=\dfrac{n(X)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 75: Mỗi lượt, ta gieo một con súc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

Lời giải

Trước hết ta tính xác suất để trong một lượt gieo thứ k không được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

Số phần tử của không gian mẫu là $C_2^1.C_6^1=12$.

Số cách gieo để được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp là $C_1^1.C_1^1=1$. Vậy $P(A_k)=\dfrac{12-1}{12}=\dfrac{11}{12}$

Gọi A là biến cố trong 3 lượt gieo có ít nhất một lượt gieo được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

Khi đó $P(A)=1-P(A_1A_2A_3)=1-\left(\dfrac{11}{12}\right)^3=\dfrac{397}{1728}$.

Câu 76: Lớp 12A có 25 học sinh chia thành 2 nhóm A và B sao cho mỗi nhóm đều có học sinh nam và nữ, nhóm A có 9 học sinh nam. Chọn ra ngẫu nhiên mỗi nhóm 1 học sinh, xác suất để chọn ra được 2 học sinh nam bằng 0,54. Xác suất để chọn ra 2 học sinh nữ bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Ta cần tìm chính xác số học sinh nam và nữ ở mỗi nhóm dựa vào điều kiện xác suất chọn ra 2 học sinh nam bằng 0,54. Gọi x,y lần lượt là số học sinh nữ ở nhóm A và nhóm B, khi đó $(16-x-y)$ là số học sinh nam ở nhóm B và có điều kiện để mỗi nhóm đều có học sinh nam và nữ là $x\ge 1, y\ge 1, 16-x-y\ge 1; x,y\in\mathbb{Z}$

Xác suất để chọn ra 2 học sinh nam bằng $\dfrac{C_9^1C_{16-x-y}^1}{C_{x+9}^1C_{16-x}^1}=0,54\Leftrightarrow y=\dfrac{3x^2-71x+368}{50}$

Ta có 2 cặp nghiệm nguyên thỏa mãn điều kiện là $(x;y)=(6;1),(1;6)$.

Từ đây tính được xác suất chọn 2 học sinh nữ trong cả 2 trường hợp là $\frac{1}{25}$

Câu 77: Xếp ngẫu nhiên 8 chữ cái trong cụm từ 'THANH HOA" thành một hàng ngang. Tính xác suất để có ít nhất hai chữ H đứng cạnh nhau.

Lời giải

Cách 1.

Xét trường hợp các chữ cái được xếp bất kì, khi đó ta xếp các chữ cái lần lượt như sau

- Có C_8^3 cách chọn vị trí và xếp có 3 chữ cái H.
- Có C_5^2 cách chọn vị trí và xếp có 2 chữ cái A.
- Có $3!$ cách xếp 3 chữ cái T, O, N.

Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_8^3.C_5^2.3!$.

Gọi A là biến cố "có ít nhất hai chữ H đứng cạnh nhau"

- Nếu có ba chữ H đứng cạnh nhau, có 6 cách xếp 3 chữ H.
- Nếu đúng hai chữ H đứng cạnh nhau thì

  + Khi hai chữ H ở hai vị trí đầu hoặc cuối có 5 cách xếp chữ cái H còn lại

  + Khi hai chữ H đứng ở vị trí giữa thì có 4 cách xếp chữ cái H còn lại.

Do đó có $2.5+5.4=30$ cách xếp 3 chữ H sao cho có đúng hai chữ H đứng cạnh nhau.

Như vậy có $30+6=36$ cách xếp 3 chữ H, ứng với cách xếp trên ta có C_5^2 cách chọn vị trí và xếp 2 chữ cái A và $3!$ cách xếp T, O, N

Suy ra $n(A)=36.C_5^2.3!$. Vậy xác suất của biến cố A là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{9}{14}$.

Cách 2. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=\frac{8!}{2!3!}=3360$

Gọi A là biến cố "có ít nhất hai chữ H đứng cạnh nhau"

Đầu tiên ta xếp 2 chữ A và ba chữ T, O, N có $\frac{5!}{2!}$ cách.

Tiếp theo ta có 6 vị trí (xen giữa và ở hai đầu) để xếp 3 chữ H và không có chữ H nào đứng liền nhau, có C_3^6 cách.

Do đó $n(\overline{A})=\frac{5!}{2!}C_6^3 \Rightarrow n(A)=n(\Omega)-n(\overline{A})=2160$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{9}{14}$.

Câu 78 : Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm, trả lời sai thì bị trừ $0,5$ điểm. Một thí sinh do không học bài nên làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Xác suất để thí sinh đó làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 là bao nhiêu?

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên phương án trả lời cho 10 câu hỏi ta được không gian mẫu có số phần tử là $n(\Omega)=4^{10}$.

Gọi A là biến cố thí sinh làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7.

Một thí sinh làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 thuộc một trong các trường hợp sau:

- Đúng 10 câu (được 10 điểm) có: 1 cách chọn.
- Đúng 9 câu và sai 1 câu (được $8,5$ điểm) có: $C_{10}^{1}.3=30$ cách chọn.
- Đúng 8 câu và sai 2 câu (được 7 điểm) có: $C_{10}^{2}.3^2=405$ cách chọn.

Khi đó $n(A)=1+30+405=436$.

Vậy xác suất để thí sinh làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 là

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{436}{4^{10}}=\dfrac{109}{262144}$.

Chú ý:

Gọi x là số câu đúng (với $0\le x\le 10$, $x\in\mathbb{N}$), $10-x$ là số câu sai thì điểm của thí sinh là $d=x-0,5(10-x)=\dfrac{3x}{2}-5$.

Vì $d\ge 7$ nên $\dfrac{3x}{2}-5\ge 7\Leftrightarrow x\ge 8$ nên $x\in\{8;9;10\}$. Do đó ta có 3 trường hợp như trong lời giải.

Câu 79: Cho A là tập các số tự nhiên có 7 chữ số. Lấy một số bất kỳ của tập A. Tính xác suất để lấy được số lẻ và chia hết cho 9.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=9000000=9.10^6$ số.

Gọi A là biến cố thỏa mãn bài toán. Ta đếm số phần tử của A.

Ta có các số lẻ chia hết cho 9 là dãy 1000017, 1000035, 1000053,.,9999999 lập thành một cấp số cộng có $u_1=1000017$ và công sai $d=18$ nên số phần tử của dãy này là $\dfrac{9999999-1000017}{18}+1=500000$. Vậy $n(A)=5.10^5$.

Xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{5.10^5}{9.10^6}=\dfrac{1}{18}$ Vì A và B là hai biến cố xung khắc nên hai biến cố này không đồng thời xảy ra.

Câu 80: Từ 2 chữ số 1 và 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số sao cho không có 2 chữ số 1 đứng cạnh nhau?

Lời giải

- TH1: Có 8 chữ số 8. Có 1 số
- TH2: Có 1 chữ số 1, 7 chữ số 8. Có 8 cách xếp chữ số 1 nên có 8 số.
- TH3: Có 2 chữ số 1, 6 chữ số 8. Xếp 6 số 8 ta có 1 cách. Từ 6 số 8 ta có có 7 chỗ trống để xếp 2 số 1. Nên ta có: $C_7^2 = 21$ số.
- TH4: Có 3 chữ số 1, 5 chữ số 8. Tương tự TH3, từ 5 chữ số 8 ta có 6 chỗ trống để xếp 3 chữ số 1. Nên có: $C_6^3 = 20$ số.
- TH5: Có 4 chữ số 1, 4 chữ số 8. Từ 4 chữ số 8 ta có 5 chỗ trống để xếp 4 chữ số 1. Nên có: $C_5^4 = 5$.

Vậy có: $1+8+21+20+5=55$ số.

Câu 81: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 10^6 được thành lập từ hai chữ số 0 và 1. Lấy ngẫu nhiên hai số trong S. Xác suất để lấy được ít nhất một số chia hết cho 3 bằng bao nhiêu?

Lời giải

Có: $a_1 \neq 0$; $a_1, ..., a_6 \in \{0;1\}$.

Số phần tử của S là : $2+1.2+1.2.2+1.2.2.2+1.2.2.2.2+1.2.2.2.2.2=64$.

Lấy ngẫu nhiên hai số trong S, có : C_{63}^2 (cách lấy).

Gọi A là biến cố lấy được ít nhất một số chia hết cho 3.

$\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố không lấy được số chia hết cho 3.

Ta xét xem trong 63 số của tập S có bao nhiêu số chia được cho 3:

- TH1: Số có 1 chữ số a_1 : có 2 số và hai số này đều không chia được cho 3.
- TH2: Số có 2 chữ số $\overline{a_1a_2}$ với $a_1 = 1$: có 2 số và 2 số này đều không chia được cho 3.
- TH3: Số có 3 chữ số $\overline{a_1a_2a_3}$ với $a_1 = 1$: có 4 số và trong đó có 1 số chia được cho 3.
- TH4: Số có 4 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ với $a_1 = 1$: có 8 số và trong đó có 3 số chia được cho 3.
- TH5: Số có 5 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ với $a_1 = 1$: có 16 số và trong đó có 6 số chia được cho 3.
- TH6: Số có 6 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ với $a_1 = 1$: có 32 số và trong đó có 11 số chia được cho 3.

Do đó có 21 số chia được cho 3 và có 43 số không chia được cho 3 .

Do đó: $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{C_{43}^2}{C_{64}^2} = \dfrac{43}{96}$. Vậy $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{53}{96}$.

Câu 82: Trong lễ tổng kết năm học $2017-2018$, lớp 12T nhận được 20 cuốn sách gồm 5 cuốn sách toán, 7 cuốn sách vật lý, 8 cuốn sách Hóa học, các sách cùng môn học là giống nhau. Số sách này được chia đều cho 10 học sinh trong lớp, mỗi học sinh chỉ nhận được hai cuốn sách khác môn học. *Bình* và *Bảo* là hai trong số 10 học sinh đó. Tính xác suất để 2 cuốn sách mà *Bình* nhận được giống 2 cuốn sách của *Bảo*.

Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là số phần quà gồm sách Toán và Vật lý, Toán và Hóa học, Vật lý và Hóa học. Khi đó theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=5 \\ x+z=7 \\ y+z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=5 \end{cases}$.

Số phần tử không gian mẫu là $|n_\Omega| = C_{10}^2.C_8^3.C_5^5 = 2520$.

Gọi A là biến cố 2 cuốn sách mà *Bình* nhận được giống 2 cuốn sách của *Bảo*.

Số phần tử của A là $n_A = C_2^2.C_8^3.C_5^5 + C_8^2.C_6^1.C_5^5 + C_8^2.C_6^3.C_3^3 = 784$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{748}{2520} = \dfrac{14}{45}$

Câu 83: Trong không gian cho $2n$ điểm phân biệt $(n \ge 3, n \in \mathbb{N})$, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong $2n$ điểm đó có đúng n điểm cùng nằm trên mặt phẳng. Biết rằng có đúng 505 mặt phẳng phân biệt được tạo thành từ $2n$ điểm đã cho. Tìm n?

Lời giải

Xem 3 điểm trong $2n$ điểm đã cho lập nên một mặt phẳng, thế thì ta có C_{2n}^3 mặt phẳng.

Tuy nhiên vì trong $2n$ điểm đó có đúng n điểm cùng nằm trên mặt phẳng nên n điểm này có duy nhất 1 mặt phẳng.

Vậy số mặt phẳng có được là $\left(C_{2n}^3 - C_n^3 + 1\right)$.

Theo đề bài ta có: $C_{2n}^3 - C_n^3 + 1 = 505 \Leftrightarrow \dfrac{(2n)!}{3!(2n-3)!} - \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 504$

$$\Leftrightarrow 2n(2n-1)(2n-2) - n(n-1)(n-2) = 3024 \Leftrightarrow 7n^3 - 9n^2 + 2n - 3024 = 0 \Leftrightarrow n = 8.$$

Câu 84 : Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số được lập từ tập $A = \{0;1;2;3;...;9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng 7875.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là số cách lập các số có 6 chữ số từ tập A, do đó số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = 9.10^5$.

Gọi B là biến cố chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng $7875 = 3^2.5^3.7$.

Số phần tử của B là $C_6^2.C_4^3 = 60$.

Suy ra xác suất $P(B)=\frac{60}{9.10^5}=\frac{1}{15000}$.

Câu 85: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Gọi P là tích ba số ở ba lần tung (mỗi số là số chấm trên mặt xuất hiện ở mỗi lần tung), tính xác suất sao cho P không chia hết cho 6.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=6^3=216$

Gọi A là biến cố "tích số chấm ở ba lần gieo là một số không chia hết cho 6"

- *Trường hợp 1.* Số chấm ở cả ba lần gieo đều là các chữ số thuộc tập $\{1,2,4,5\}$

  + Cả ba lần số chấm khác nhau có A_4^3 khả năng.

  + Có hai lần số chấm giống nhau có $C_4^2.\frac{3!}{2!}.2$ khả năng.

  + Cả ba lần số chấm giống nhau có 4 khả năng.

  $\Rightarrow$ Có 64 khả năng.

- *Trường hợp 2.* Số chấm ở cả ba lần gieo đều là các chữ số thuộc tập $\{1,3,5\}$

  + Cả ba lần số chấm khác nhau có $3!$ khả năng.

  + Có hai lần số chấm giống nhau có $C_3^2.\frac{3!}{2!}.2$ khả năng.

  + Cả ba lần số chấm giống nhau có 3 khả năng.

  $\Rightarrow$ Có 27 khả năng.

  Tuy nhiên ở trường hợp 1 và 2 bị trùng nhau ở khả năng:

  + Ba lần số chấm giống nhau đối với số chấm 1 và 5: Chỉ có 2 khả năng

  + Có hai lần số chấm giống nhau đối với 1 và 5: Chỉ có 6 khả năng.

Do đó $n(A)=64+27-(2+6)=83$.

Vậy $P(A)=\frac{83}{216}$.

Câu 86: Một người viết ngẫu nhiên một số có bốn chữ số. Tính xác suất để các chữ số của số được viết ra có thứ tự tăng dần hoặc giảm dần (nghĩa là nếu số được viết dưới dạng $\overline{abcd}$ thì $a<b<c<d$ hoặc $a>b>c>d$).

Lời giải

Viết ngẫu nhiên một số có 4 chữ số nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=9.10.10.10=9000$.

Gọi A là biến cố các chữ số của số được viết ra có thứ tự tăng dần hoặc giảm dần

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số mà các chữ số của số được viết ra có thứ tự tăng dần hoặc giảm dần có dạng $\overline{abcd}$.

- Trường hợp 1: số tự nhiên có 4 chữ số mà các chữ số của số được viết ra có thứ tự giảm dần. Vì $a>b>c>d$ nên các chữ số đôi một khác nhau và các chữ số a, b, c, d lấy từ tập $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ và với 4 chữ số lấy ra từ X thì chỉ lập được duy nhất một số thỏa yêu cầu bài toán. Do đó số số tự nhiên có 4 chữ số mà các chữ số của số được viết ra có thứ tự tăng dần là C_9^4.
- Trường hợp 2: số tự nhiên có 4 chữ số mà các chữ số của số được viết ra có thứ tự tăng dần. Vì $a<b<c<d$ nên các chữ số đôi một khác nhau và các chữ số a, b, c, d lấy từ tập $Y=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ và với 4 chữ số lấy ra từ Y thì chỉ lập được duy nhất mọt số thỏa yêu cầu bài toán. Do đó số số tự nhiên có 4 chữ số mà các chữ số của số được viết ra có thứ tự giảm dần dần là C_{10}^4.

Vậy số phần tử của biến cố A là $n(A)=C_9^4+C_{10}^4=336$.

Xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{336}{9000}=\dfrac{14}{375}$.

Câu 87: Chia ngẫu nhiên 9 viên bi gồm 4 viên màu đỏ và 5 viên màu xanh có cùng kích thước thành ba phần, mỗi phần 3 viên. Xác xuất để không có phần nào gồm 3 viên cùng màu bằng

Lời giải

Cách 1: Vì xác suất không thay đổi khi ta coi ba phần này có xếp thứ tự 1, 2, 3.

Chia ngẫu nhiên 9 viên bi gồm 4 viên màu đỏ và 5 viên màu xanh có cùng kích thước thành ba phần, mỗi phần 3 viên như sau:

- Phần 1: Chọn 3 viên cho phần 1 có C_9^3 cách.
- Phần 2: Chọn 3 viên cho phần 2 có C_6^3 cách.
- Phần 3: Chọn 3 viên lại cho phần 3 có 1 cách.

Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_9^3.C_6^3=1680$.

Gọi A là biến cố không có phần nào gồm 3 viên cùng màu, khi đó ta chia các viên bi thành 3 bộ như sau:

- Bộ 1: 2 đỏ, 1 xanh: Có $C_4^2C_5^1$ cách chọn
- Bộ 2: 1 đỏ, 2 xanh: Có $C_2^1C_4^2$ cách chọn
- Bộ 3: gồm các viên bi còn lại(1 đỏ, 2 xanh).

Vì bộ 2 và 3 có các viên bi giống nhau để không phân biệt hai bộ này nên có $\dfrac{3!}{2!}$ sắp xếp 3 bộ vào 3 phần trên. Do đó $n(A)=\dfrac{3!}{2!}C_4^2C_5^1C_2^1C_4^2=1080$.

Ta được $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1080}{1680}=\dfrac{9}{14}$.

Cách 2: Mã hóa:

- 4 viên bi đỏ giống nhau là 1, 1, 1, 1.
- 5 viên bi xanh giống nhau là 0, 0, 0, 0, 0.

+ Xếp 9 phần tử hàng ngang có $|\Omega| = \frac{9!}{5!.4!} = 126$ (cách).

+ Một cách xếp thỏa yêu cầu là $\underset{1}{1,1,0}\Big|\underset{2}{1,0,0}\Big|\underset{3}{1,0,0}$.

- Hoán vị các nhóm có $\frac{3!}{2!} = 3$ (do có 2 nhóm giống nhau).

- Rồi hoán vị các số trong mỗi nhóm có: $3.3.3 = 27$.

Do đó biến cố A có: $|\Omega_A| = 3 \times 27 = 81$. Vậy $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{81}{126} = \frac{9}{14}$.

Câu 88: Cho đa giác đều (P) có 20 đỉnh. Lấy tùy ý 3 đỉnh của (P), tính xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác vuông sao cho, không có cạnh nào là cạnh của (P).

Lời giải

Không gian mẫu: Chọn 3 đỉnh bất kì từ 20 đỉnh để tạo thành một tam giác $\Rightarrow n(\Omega) = C_{20}^3$

Biến cố A: 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác vuông sao cho, không có cạnh nào là cạnh của (P).

Ta có đa giác (P) nội tiếp một đường tròn, nên tam giác vuông tạo ra từ một đường chéo (qua tâm) bất kì và một điểm khác (tam giác nội tiếp có một cạnh là đường kính là tam giác vuông)

Số cách chọn đường chéo qua tâm là 10 cách.

Một đường chéo đi qua 2 đỉnh, nên theo yêu cầu, đỉnh thứ ba không thể là 4 đỉnh nằm cạnh hai đỉnh đã chọn $\to$ có $20 - 2 - 4 = 14$ cách chọn (trừ hai đỉnh tạo thành đường chéo nữa) Vậy $n(A) = 10 \times 14 = 140$ tam giác.

Vậy xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành một tam giác vuông sao cho, không có cạnh nào là cạnh của (P) là $p = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{140}{C_{20}^3} = \frac{7}{57}$.

Câu 89: Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng một lúc ba tấm thẻ. Hỏi có bao nhiêu cách rút sao cho bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?

Lời giải

Giả sử số ghi trên ba thẻ sắp xếp theo thứ tự tăng dần là $a < b < c$.

Vì hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn kém nhau ít nhất 2 đơn vị nên ta có: $\begin{cases} a < b - 1 \\ b < c - 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \le a < b - 1 < c - 2 \le 24$.

Vậy số cách lấy là: $C_{24}^3 = 2024$ cách.

Câu 90: Cho A là tập các số tự nhiên có 9 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập A. Tính xác suất lấy được một số lẻ và chia hết cho 9.

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 9.10^8$

Gọi B là biến cố thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có các số lẻ có 9 chữ số chia hết cho 9 là 100000017, 100000035, 100000053,……, 999999999 lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 100000017$ và công sai $d = 18$.

Nên số phần tử của dãy là $\dfrac{999999999 - 100000017}{18} + 1 = 50000000$

Vậy $n(B) = 5.10^7$. Xác suất là $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{5.10^7}{9.10^8} = \dfrac{1}{18}$.

Câu 91: Cho đa giác đều (H) có 15 đỉnh. Người ta lập một tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của (H). Tính số tứ giác được lập thành mà không có cạnh nào là cạnh của (H).

Lời giải

Kí hiệu đa giác là $A_1A_2...A_{15}$.

- TH1: Chọn tứ giác có dạng $A_1A_mA_nA_p$ với $1 < m < n < p \le 15$. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là số các đỉnh nằm giữa A_1 với A_m, A_m với A_n, A_n với A_p và A_p với A_1.

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_i \ge 1, i = 1,2,3,4 \end{cases}$.

Đặt $x_i' = x_{i-1}$ thì $x_i' \ge 0$ và $x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 7$ nên có $C_{10}^3 = 120$ tứ giác.

- TH2: Không chọn đỉnh A_1. Giả sử tứ giác được chọn là $A_mA_nA_pA_q$ với $1 < m < n < p < q \le 15$. Gọi x_1 là số các đỉnh giữa A_1 và A_m, x_2 là số các đỉnh giữa A_m và A_n, x_3 là số các đỉnh giữa A_n và A_p, x_4 là số các đỉnh giữa A_p và A_q, x_5 là các đỉnh giữa A_q và A_1.

Ta có hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 1, x_5 \ge 0 \end{cases}$. Tương tự trường hợp trên có $C_{11}^4 = 330$ tứ giác.

Vậy có 450 tứ giác

Câu 92: Có bao nhiêu số có 5 chữ số tận cùng là 1 và chia hết cho 7.

Lời giải

Số tự nhiên có 5 chữ số thỏa mãn đề bài là $\overline{abcd1}$

Giả sử $\overline{abcd1} = 10.\overline{abcd} + 1 = 3.\overline{abcd} + 7.\overline{abcd} + 1$

Ta có chia hết cho 7 khi $3.\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7.

Khi đó, $3.\overline{abcd}+1=7k \Leftrightarrow \overline{abcd}=2k+\frac{k-1}{3}, k\in\mathbb{Z}$ là số nguyên khi $k=3l+1$.

Suy ra $\overline{abcd}=7l+2 \Rightarrow 1000\le 7l+2\le 9999 \Leftrightarrow \frac{998}{7}\le l\le\frac{9997}{7}$ có 1286 giá trị của l.

Vậy có 1286 số thỏa mãn bài toán.

Câu 93: Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có năm chữ số. Tính xác suất để số được chọn có dạng $\overline{abcde}$ trong đó $1\le a\le b\le c\le d\le e\le 9$.

Lời giải

Có 9.10^4 số tự nhiên có 5 chữ số được tạo thành.

Từ $1\le a\le b\le c\le d\le e\le 9 \Rightarrow 1\le a<b+1<c+2<d+3<e+4\le 13$.

Đặt $a_1=a$, $a_2=b+1$, $a_3=c+2$, $a_4=d+3$, $a_5=e+4 \Rightarrow 1\le a_1<a_2<a_3<a_4<a_5\le 13$.

Mỗi cách chọn bộ số (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) tương ứng ta được một số $\overline{abcde}$ thỏa mãn bài toán.

Số các số có dạng $\overline{abcde}$ thỏa mãn là $C_{13}^5=1287$ số.

Vậy xác suất cần tìm là $P=\frac{1287}{9.10^4}=\frac{143}{10000}$.

Câu 94: Cho các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập một số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau dạng $\overline{abcdef}$. Tính xác suất để số lập được thỏa mãn $a+b=c+d=e+f$?

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega)=6.6!=4320$.

Số lập được thỏa mãn $a+b=c+d=e+f$ ta có các trường hợp sau:

- TH1: xét các bộ số $\{0;6\}$, $\{1;5\}$, $\{2;4\}$:

  Nếu $\{a;b\}=\{0;6\}$ thì có 1 cách sắp xếp. Khi đó hai cặp số còn lại có: $2.2.2=8$ cách.

  Nếu $\{a;b\}=\{1;5\}$ thì có 2 cách sắp xếp. Khi đó hai cặp số còn lại có: $2.2.2=8$ cách.

  Nếu $\{a;b\}=\{2;4\}$ thì có 2 cách sắp xếp. Khi đó hai cặp số còn lại có: $2.2.2=8$ cách.

  Suy ra có: $8.5=40$ (số).

- TH2: xét các bộ số $\{0;5\}$, $\{1;4\}$, $\{2;3\}$: tương tự TH1 có $8.5=40$ (số).
- TH3: xét các bộ số $\{1;6\}$, $\{2;5\}$, $\{3;4\}$: có $3.2.8=48$ (số).

Vậy xác suất $P(A)=\frac{40+40+48}{4320}=\frac{4}{135}$.

Câu 95: Có 4 cặp vợ chồng cần xếp ngồi vào một bàn tròn. Tính số cách xếp sao cho có vợ chồng nhà A là ngồi cạnh nhau còn các cặp vợ chồng khác thì hai người là vợ chồng của nhau thì không ngồi cạnh nhau.

Lời giải

Có 2 cách sắp xếp cho vợ chồng A ngồi vào bàn tròn (giả sử ông chồng ngồi cố định, còn bà vợ có 2 cách xếp).

- Ta lại xếp 1 cặp vợ chồng khác vào bàn tròn, cặp vợ chồng này có thể đổi chỗ cho nhau nên có $2!$ cách.
- Bây giờ có tất cả 3 khe trống (vì cặp vợ chồng A không cho ai ngồi giữa). Ta xếp 1 cặp vợ chồng khác vào 3 khe này nên có $A_3^2 = 6$ cách.
- Bây giờ có tất cả 5 khe trống. Ta xếp 1 cặp vợ chồng còn lại vào 5 khe này nên có $A_5^2 = 20$ cách.

Vậy có $2 \times 2 \times 6 \times 20 = 480$ cách.

III. TÀI LIỆU THAM KHẢO

Các bạn ấn vào số trước tên tài liệu để tải về nhé!

[1] Tổ hợp xác suất Nguyễn Minh Đức

[2] Trắc nghiệm nâng cao tổ hợp xác suất – Đặng Việt Đông

[3] Bài toán chia kẹo Euler và ứng dụng – Lục Trí Tuyên

[4] Tổ hợp xác suất – Nhóm ham học toán

IV. LỜI KẾT

Chuyên mục tuần này xin được phép kết thúc tại đây, mọi thắc mắc về vấn đề ôn thi THPT Quốc Gia hay những vấn đề nào các bạn thấy khó hiểu các bạn có thể gửi về địa chỉ fanpage Tạp chí và tư liệu toán học , xin chào và hẹn gặp lại các bạn trong chuyên mục tuần sau ☺